Dvanajste vaje APS2: Računska geometrija 1

Na predavanjih smo videli, da je vektorski produkt uporaben pri preverjanju, ali se daljici sekata, pri preverjanju konveksnosti večkotnika, pri računanju konveksne ovojnice in še kje. Na vajah pa bomo ugotovili, da pride prav tudi pri računanju ploščine večkotnika in pri preverjanju, ali točka leži znotraj večkotnika.

V obeh primerih se bomo omejili na *enostavne* večkotnike. Takšni večkotniki so lahko konveksni ali konkavni, vendar pa se ne sekajo in ne vsebujejo lukenj.

Večkotnik bomo predstavili z zaporedjem oglišč $A_1, A_2, \ldots, A_n$ v nasprotni smeri urinega kazalca. Da se izognemo sitnostim z računanjem po modulu, bomo predpostavili, da je $A_{n+1} = A_1$, $A_{n+2} = A_2$ itd. Točka A_i leži na koordinatah (x_i, y_i).

Vektorski produkt

Spomnimo se, da je vektorski produkt $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ vektor $\overrightarrow{c}$, ki je pravokoten na vektorja $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1)$ in $\overrightarrow{b} = (x_2, y_2)$. Njegova smer je določena po pravilu desne roke (kam kaže palec, če s preostalimi prsti »objamemo« najkrajšo pot od vektorja $\overrightarrow{a}$ do vektorja $\overrightarrow{b}$?), njegova dolžina pa znaša $|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot |\sin\varphi|$, kjer je φ kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$. No, če vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ ležita v koordinatni ravnini, potem sta koordinati x in y vektorja $\overrightarrow{c}$ enaki 0, koordinata z pa je enaka $x_1y_2 - x_2y_1$. Ker bomo rokovali samo z vektorji v koordinatni ravnini, nas bo zanimala samo koordinata z. To vrednost bomo (z zavedanjem o kar hudem zlorabljanju notacije) proglasili za »vektorski produkt«:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Vektorski produkt je po naši definiciji pozitiven, če vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ oklepata kot iz intervala $(0°, 180°)$, negativen, če kot med vektorjema pripada intervalu $(180°, 360°)$, in enak 0, če je kot bodisi 0° bodisi 180°. Upoštevajmo, da kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ izmerimo tako, da od vektorja $\overrightarrow{a}$ do vektorja $\overrightarrow{b}$ potujemo v nasprotni smeri urinega kazalca: kot med vektorjema $(1, 0)$ in $(0, 1)$ je tako 90°, kot med vektorjema $(0, 1)$ in $(1, 0)$ pa je 270° ali −90°, kar je enakovredno.

Ploščina večkotnika

Računanje ploščine večkotnike je lahko precejšen izziv, če imamo na voljo samo (nekatere) dolžine stranic in kote. Povsem drugače pa je, če je večkotnik določen s koordinatami zaporednih točk, saj si v tem primeru lahko pomagamo z vektorskim produktom.

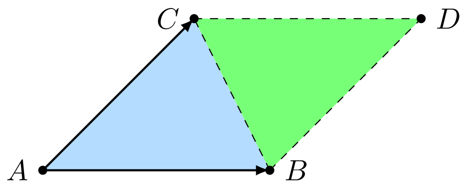
Primer 1: konveksen večkotnik, ki vsebuje točko $(0, 0)$

Če računamo ploščino konveksnega večkotnika, ki vsebuje točko $O = (0, 0)$, lahko enostavno seštejemo ploščine trikotnikov OA_iA_{i+1} za $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ker je ploščina trikotnika OA_iA_{i+1} enaka polovici ploščine paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\overrightarrow{OA_i}$ in $\overrightarrow{OA_{i+1}}$ (slika 1), si lahko pomagamo z vektorskim produktom:

$$p_i = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA_i} \times \overrightarrow{OA_{i+1}} = \frac{1}{2}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i).$$

Kot prikazuje slika 2, je ploščina celotnega večkotnika preprosto enaka vsoti ploščin posameznih trikotnikov:

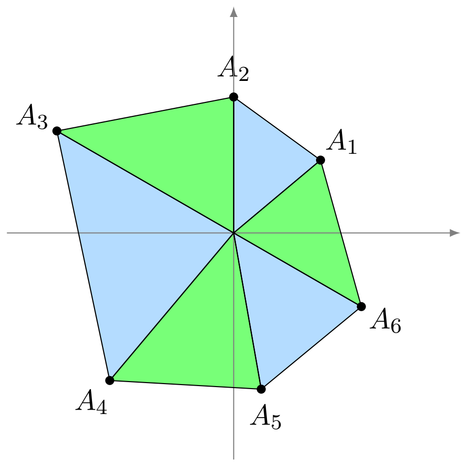
$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i). \tag{1}$$



Slika 1: *Ploščina trikotnika ABC je polovica ploščine paralelograma $ABDC$.*

Ne pozabimo, da je $x_{n+1} = x_1$ in $y_{n+1} = y_1$.

Kako pa je s predznaki vektorskih produktov? Vsi so pozitivni, saj je v primeru, ki ga obravnavamo v tem razdelku, kot med vektorjema $\overrightarrow{OA_i}$ in $\overrightarrow{OA_{i+1}}$ vedno manjši od 180°.



Slika 2: *Računanje ploščine konveksnega večkotnika.*

Primer 2: splošen večkotnik, ki vsebuje točko $(0, 0)$

Morda nas bo nekoliko presenetilo, da lahko formulo (1) uporabimo tudi v primeru, če večkotnik ni konveksen. Tega sicer ne bomo dokazali, bomo pa s pomočjo slike 3 poskušali razumeti, zakaj je tako. Ploščina večkotnika je po naši formuli enaka

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \times \overrightarrow{OA_{i+1}}.$$

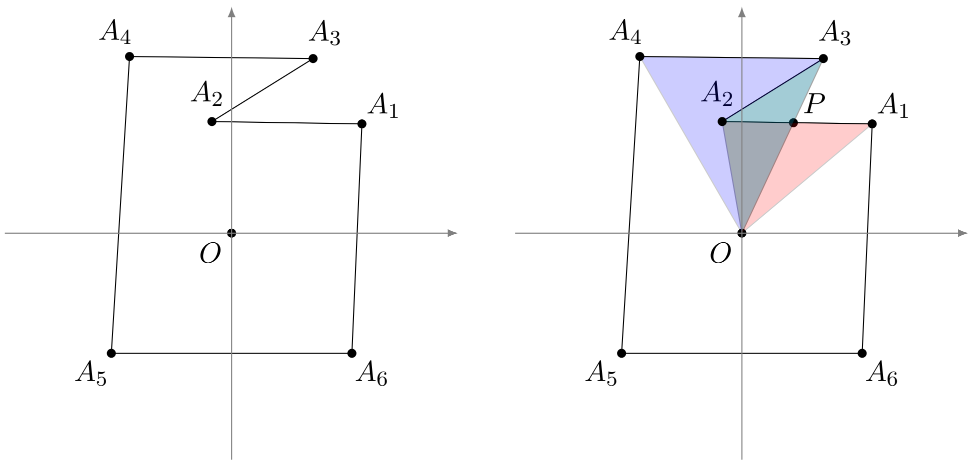
Na začetku izračunamo vektorski produkt $\overrightarrow{OA_1} \times \overrightarrow{OA_2}$. Ta je pozitiven, saj vektorja $\overrightarrow{OA_1}$ in $\overrightarrow{OA_2}$ oklepata kot, ki je manjši od 180°. Naslednji vektorski produkt $(\overrightarrow{OA_2} \times \overrightarrow{OA_3})$ pa je negativen, saj vektorja $\overrightarrow{OA_2}$ in $\overrightarrow{OA_3}$ oklepata kot, ki je večji od 180°. Vektorski produkt $\overrightarrow{OA_3} \times \overrightarrow{OA_4}$ je zopet pozitiven. Polovica vsote teh treh vektorskih produktov je potemtakem

$$\begin{aligned}
p' &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1} \times \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_2} \times \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_3} \times \overrightarrow{OA_4}) \\
&= p(OA_1A_2) - p(OA_2A_3) + p(OA_3A_4) \\
&= (p(OA_1P) + p(OPA_2)) - (p(OPA_2) + p(A_2PA_3)) + (p(OPA_2) + p(A_2PA_3) + p(OA_2A_3A_4)) \\
&= p(OA_1P) + p(OPA_2) + p(OA_2A_3A_4) \\
&= p(OA_1A_2) + p(OA_2A_3A_4) \\
&= p(OA_1A_2A_3A_4).
\end{aligned}$$

Če prištejemo še polovice preostalih treh vektorskih produktov, dobimo ploščino celotnega večkotnika.

Vidimo, da ploščina trikotnika A_2PA_3 v izrazu enkrat nastopa s predznakom plus, enkrat pa s predznakom minus, zato v končnem izrazu ni prisotna. Ploščina trikotnika OPA_2 nastopa kar trikrat, a ker ima v eni od teh pojavitev predznak minus, je v končnem izrazu prisotna natanko enkrat.

Opisano opažanje je mogoče posplošiti: pri računanju ploščine splošnega večkotnika se bodo nekateri kosi upoštevali večkrat, a se bodo predznaki »sestavili« tako, da se bodo v končnem izrazu upoštevali zgolj kosi, ki pripadajo večkotniku, in to le po enkrat.



Slika 3: *Računanje ploščine splošnega večkotnika.*

Primer 3: splošen večkotnik

Recimo, da večkotnik ne vsebuje točke $(0,0)$, vsebuje pa točko (x',y'). Sedaj lahko vsa oglišča premaknemo za vektor $(-x',-y')$ in problem prevedemo na primer 2, saj je točka $(0,0)$ po novem v notranjosti večkotnika. Izračunajmo ploščino po formuli (1):

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}((x_i-x')(y_{i+1}-y')-(x_{i+1}-x')(y_i-y')) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i-x'(y_{i+1}-y_i)-y'(x_i-x_{i+1})) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)-x'\sum_{i=1}^{n}(y_{i+1}-y_i)-y'\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})\right).
\end{aligned}$$

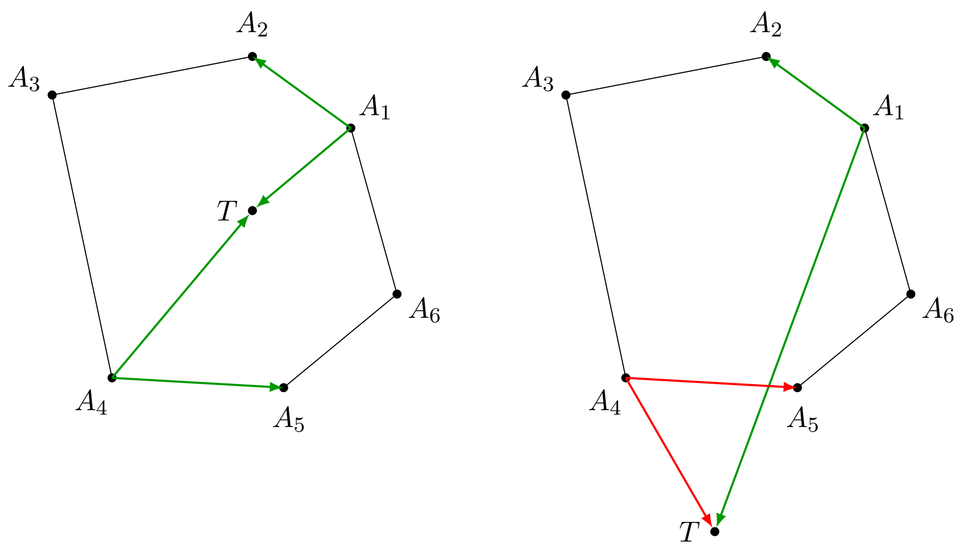
Ker je $y_{n+1}=y_1$, je $\sum_{i=1}^{n}(y_{i+1}-y_i)=(y_2+y_3+\ldots+y_n+y_1)-(y_1+y_2+\ldots+y_n)=0$. Enak rezultat dobimo za vsoto $\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})$. To pomeni, da je ploščina takšnega večkotnika enaka

$$p=\sum_{i=1}^{n}p_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i).$$

Formula (1) torej velja za *poljuben* večkotnik, ne glede na to, ali je konveksen ali konkaven, in ne glede na to, kje je postavljen.

Položaj točke glede na večkotnik

V tem razdelku nas bo zanimalo, ali se podana točka T nahaja znotraj ali zunaj podanega večkotnika $A_1A_2\ldots A_n$, kjer so oglišča nanizana v nasprotni smeri urinega kazalca. Pri konveksnih večkotnikih zadošča, če preverimo, ali se točka T vseskozi nahaja na levi strani, ko potujemo po stranicah od oglišča A_1 do A_n. Točka T se nahaja na levi strani stranice A_iA_{i+1} (če po njej potujemo v smeri $A_i \to A_{i+1}$) natanko v primeru, če je vektorski produkt $\overrightarrow{A_iA_{i+1}} \times \overrightarrow{A_iT}$ pozitiven. V tem primeru namreč vektorja oklepata kot, ki je manjši od $180°$ (slika 4).

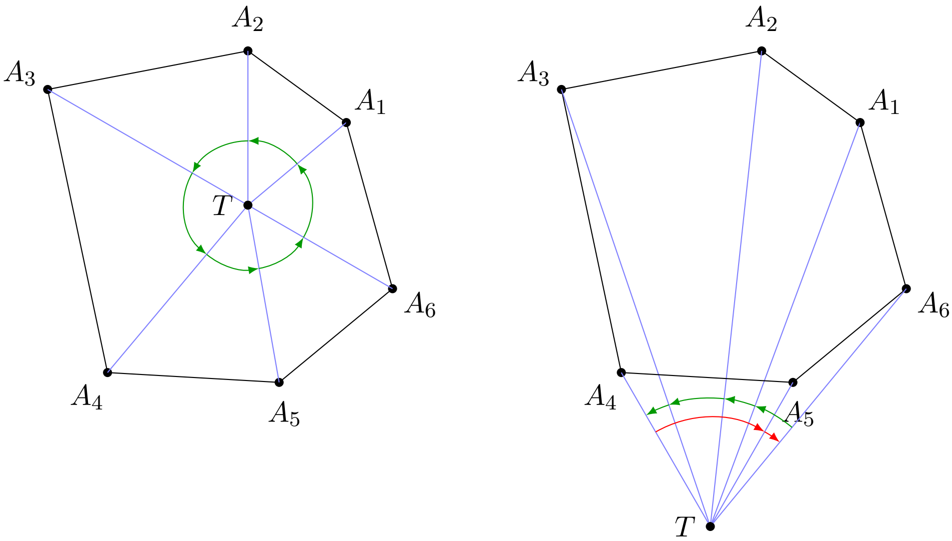


Slika 4: *Levo: vsi vektorski produkti* $\overrightarrow{A_iA_{i+1}} \times \overrightarrow{A_iT}$ *so pozitivni. Desno: vsaj eden od teh vektorskih produktov ni pozitiven.*

Skratka, točka T je znotraj konveksnega večkotnika natanko v primeru, če so vsi vektorski produkti $\overrightarrow{A_iA_{i+1}} \times \overrightarrow{A_iT}$ pozitivni. Pri konkavnih večkotnikih ta preprost preizkus ne zadošča več, lahko pa si pomagamo z vsoto kotov $S = \sum_{i=1}^{n} \angle A_iTA_{i+1}$ (T je vrh kota). Če vse kote omejimo na interval $(-180°, 180°)$ (če torej za vsak kot izvedemo operacijo $\varphi' = (\varphi + 180°) \bmod 360° - 180°$), velja sledeče:

Trditev 1. *Če je točka T znotraj večkotnika $A_1A_2\ldots A_n$, je vsota S enaka $360°$. Če je točka T izven večkotnika, velja $S = 0°$.*

Trditev velja tako za konveksne kot za konkavne večkotnike. Dokazali je ne bomo, bomo jo pa poskušali razumeti na primeru. Slika 5 prikazuje dva položaja točke T glede na večkotnik. V prvem primeru je vsota kotov očitno $360°$ (stopimo na točko T in se ozremo okrog sebe), v drugem primeru pa tudi ni težko videti, da je vsota enaka $0°$: koti A_6TA_1, A_1TA_2, A_2TA_3 in A_3TA_4 so pozitivni, kota A_4TA_5 in A_5TA_6 pa negativna, in vsota negativnih kotov je ravno nasprotno enaka vsoti pozitivnih kotov.



Slika 5: *Levo: vsota kotov je v enaka 360°. Desno: vsota kotov je enaka 0°.*