Algoritmi in podatkovne strukture 2 — drugi izpitni rok
30. junij 2026

Ime: _____

Priimek: _____

Vpisna številka: _____

1. naloga: _____ od 20 (6 + 7 + 7)

2. naloga: _____ od 20 (5 + 5 + 5 + 5)

3. naloga: _____ od 20 (7 + 6 + 7)

4. naloga: _____ od 20 (6 + 7 + 7)

Skupaj: _____ od 80

Za reševanje imate na voljo 100 minut časa. Vse odgovore obvezno utemeljite!

(1) Podan je enosmerno povezan seznam $S = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, kjer so vsi elementi med seboj različni. Za vsak element je podana verjetnost iskanja tega elementa ($p(x_k)$ za $k \in \{1, \ldots, n\}$). Definirajmo

$$C(S) = \sum_{k=1}^{n} kp(x_k).$$

(a) Kolikšen je $C(S)$ za seznam S z n elementi, kjer so vse verjetnosti iskanja enake $1/n$?

(b) Dokažite, da minimalno vrednost $C(.)$ dosežemo tako, da elemente v seznamu uredimo po padajočih verjetnostih iskanja. (Namig: spomnite se na frizerja z vaj.)

(c) Recimo, da seznam uredimo s sledečim algoritmom:

```
function UREDI(S, l, r)          ▷ Vrne urejeno kopijo podseznama S[l : r].
    if r > l then
        m ← ⌊(l + r) / 2⌋
        L ← UREDI(S, l, m)
        R ← UREDI(S, m + 1, r)
        ▷ Izdelamo urejen seznam, sestavljen iz elementov seznamov L in
          R. V obeh seznamih pričnemo s prvim elementom. V vsaki ite-
          raciji nato vzamemo večjega od trenutno obravnavanih elementov
          seznamov L in R, ga dodamo na konec izhodnega seznama in se
          premaknemo na naslednji element seznama L (če smo element vzeli
          iz L) oziroma R (če smo element vzeli iz R). Postopek ponavljamo,
          dokler pri obeh vhodnih seznamih ne prispemo do konca.  ◁
        T ← ZLIJ(L, R)
    else
        T ← nov seznam z elementom S[l]
    return T
```

Ker so seznami drugačni od tabel, je časovna zahtevnost tega algoritma gotovo $\Omega(n^2)$. Imam prav?

Rešitve

(a) Mačji kašelj:

$$\begin{aligned} C(S) &= 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots n \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

(b) Uporabimo običajen trik pri požrešnih algoritmih: predpostavimo, da optimalen nek drug, nepožrešen seznam $S = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$. Naj bo $i < j$ in $p(y_i) < p(y_j)$; če seznam ni požrešen, potem tak par gotovo obstaja. Elementa y_i in y_j zamenjamo med seboj, tako da dobimo seznam S'. Računajmo:

$$C(S') = C(S) - ip(y_i) - jp(y_j) + jp(y_i) + ip(y_j)$$

$$
\begin{aligned}
&= C(S) - p(y_i)(i-j) + p(y_j)(i-j) \\
&= C(S) - (i-j)(p(y_i) - p(y_j)) \\
&< C(S),
\end{aligned}
$$

saj je $i - j < 0$ in $p(y_i) - p(y_j) < 0$. Skratka, z zamenjavo elementov, ki tvorita inverzijo, smo pridelali seznam z manjšo vrednostjo $C(.)$, kar je v nasprotju s predpostavko, da je seznam S v tem smislu optimalen.

(c) Ne, Fürst, biksaš ga: problem razdeliš na dva problema enake velikosti, za zlivanje že urejenih seznamov pa potrebuješ $O(n)$ časa — nič več kot za tabele. Rekurenčna enačba se torej glasi

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n).$$

Po krovnem izreku je $a = 2$, $b = 2$ in $d = 1$. Ker je $a = b^d$, je časovna zahtevnost enaka $T(n) = \Theta(n \log n)$.

(2) Na n zaporednih sedežev bi radi razporedili $k \leqslant \lceil n/2 \rceil$ oseb, tako da je med zaporednima osebama vsaj en prost sedež. Število možnih razporeditev označimo z $R(n,k)$. Na primer, $R(7,0) = 1$, $R(7,1) = 7$, $R(7,2) = 15$, $R(7,3) = 10$ in $R(7,4) = 1$.

(a) Zapišite rekurenčno enačbo za $R(n,k)$. (Namig: kateri dve možnosti imamo pri obravnavi prvega sedeža?)

(b) Zapišite algoritem za računanje $R(n,k)$, ki temelji na dinamičnem programiranju po metodi od spodaj navzgor.

(c) Kolikšna je časovna in kolikšna prostorska zahtevnost algoritma iz prejšnje točke?

(d) Dokažite, da je časovna zahtevnost algoritma, ki $R(n,k)$ računa naivno po enačbi, enaka $\Omega\left(\binom{n-1}{k}\right)$.

Rešitve

(a) Za prvi sedež imamo dve možnosti: (1) nanj posadimo eno od oseb; (2) nanj ne posadimo nobene osebe. Če izberemo možnost (1), rešimo podproblem za $k-1$ oseb in $n-2$ sedežev (saj na drugi sedež ne smemo posaditi nikogar), v nasprotnem primeru pa rešimo podproblem za k oseb in $n-1$ sedežev. Če upoštevamo še robne primere, dobimo

$$R(n,k) = \begin{cases} 0 & \text{v primeru } k > \lceil n/2 \rceil; \\ 1 & \text{v primeru } k = 0; \\ R(n-2,k-1) + R(n-1,k) & \text{sicer.} \end{cases}$$

(b)
```
function RAZPOREDITVE(n, k)
    inicializiraj tabelo D[0 : n, 0 : k]
    for i ← 0 to n do
        D[i, 0] ← 1
    D[1, 1] ← 1
    for i ← 2 to n do
        for j ← 1 to min(k, ⌈i/2⌉) do
            D[i, j] ← D[i − 2, j − 1] + D[i − 1, j]
    return D[n, k]
```

(c) Tako časovna kot prostorska zahtevnost je enaka $\Theta(nk)$.

(d) Naš R je definiran rekurenčno, binomski simbol pa prav tako:

$$\binom{n-1}{k} = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k},$$

če zanemarimo robne primere, ki pri določanju računske zahtevnosti praviloma niso bistveni.

Induktivno predpostavimo, da velja $R(n',k') = \Omega\left(\binom{n'-1}{k'}\right)$ za vse $n' < n$ in $k' \leqslant k$. To lahko zapišemo kot $R(n',k') \geqslant c\binom{n'-1}{k'}$ za nek $c > 0$ in od nekega n'_0 in k'_0 naprej.

Ker funkcija $R(n,k)$ pri fiksnem k monotono narašča v odvisnosti od n, velja

$$\begin{aligned} R(n,k) &= R(n-2,k-1) + R(n-1,k) \\ &\geqslant R(n-2,k-1) + R(n-2,k) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant c\binom{n-2}{k-1} + c\binom{n-2}{k} \\
&= c\left(\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}\right) \\
&= c\binom{n-1}{k} \\
&= \Omega\left(\binom{n-1}{k}\right).
\end{aligned}
$$

(3) Naj bo $A(P)$ deterministični končni avtomat za iskanje vzorca P.

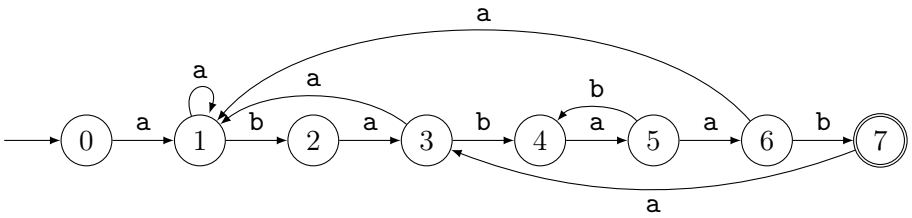
(a) Narišite (ali kako drugače zapišite) $A(\texttt{ababaab})$. Da bo slika preglednejša, izpustite povezave, ki vodijo v stanje 0.

(b) Formalno zapišite ali opišite množico nizov, ki avtomat $A(P)$ privedejo v končno stanje (zanima nas torej jezik avtomata $A(P)$ za splošen P).

(c) Če je $\delta(s, c) = t$ za $t < s$ in $c \in \Sigma$, potem zanesljivo vemo, da je $Z(i) = j$ (gre za Z-funkcijo, ki smo jo spoznali na vajah) za nek i in j. Kolikšna sta i in j?

Rešitve

(a)

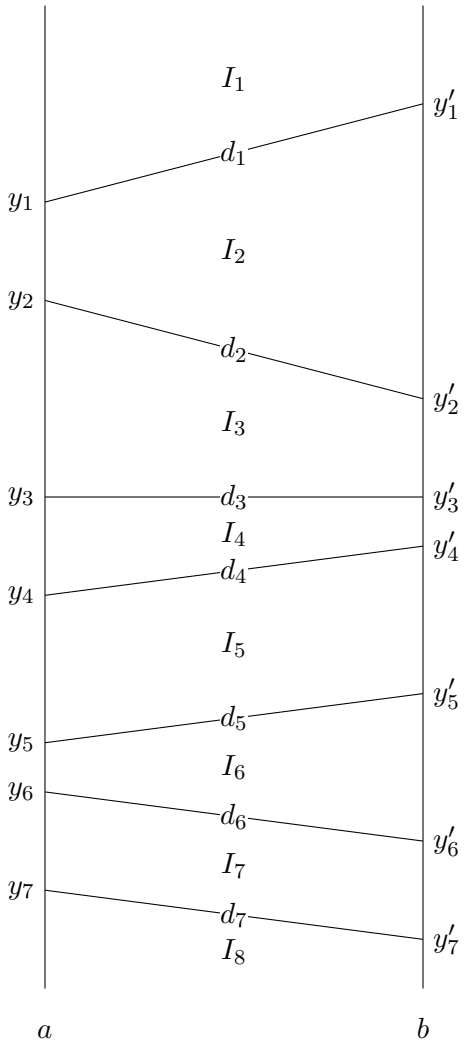


(b) Jezik avtomata $A(P)$ je množica vseh nizov (besedil), pri katerih je zadnjih $|P|$ znakov enakih P:

$$L(A) = \{T \in \Sigma^* \mid P \sqsupseteq T\}$$

(c) Ker je $t < s$, vemo, da c ni enak $P[s+1]$, saj bi sicer veljalo $\delta(s, c) = s + 1$. Po definiciji funkcije δ pa velja $P[: t] \sqsupseteq P[: s]c$ oziroma $P[1 : t] = P[s - t + 2 : s]c$. Zaradi $c \neq P[s+1]$ velja $P[1 : t] \neq P[s-t+2 : s+1]$, vendar pa je $P[1 : t-1] = P[s - t + 2 : s]$. To pomeni, da je $Z(s - t + 2) = t - 1$ oziroma $i = s - t + 2$ in $j = t - 1$.

(4) Med navpičnima premicama $x = a$ in $x = b$ ($a < b$) je razpetih n daljic; i-ta med njimi ima levo krajišče v točki (a, y_i), desno pa v točki (b, y'_i). Noben par daljic se med seboj ne seka. To pomeni, da teh n daljic razdeli pas $[a, b] \times (-\infty, \infty)$ na $n + 1$ intervalov $(I_1, \ldots, I_{n+1})$. Sledeča slika prikazuje primer za $n = 7$:



Za točko $T(x, y)$, kjer je $x \in [a, b]$, bi radi ugotovili, v katerem od teh $n + 1$ intervalov se nahaja. Zaradi enostavnosti predpostavimo, da se točka ne nahaja na nobeni daljici, ampak samo strogo znotraj enega od intervalov.

(a) Kako bi za točko $T(x, y)$ ($x \in [a, b]$) ugotovili, ali se nahaja nad daljico med točkama $A(a, y_l)$ in $B(b, y_r)$? Pogoj zapišite v obliki matematičnega izraza.

(b) Interval, v katerem leži točka T, lahko učinkovito poiščemo, če pred tem zgradimo uravnoteženo dvojiško iskalno drevo. Narišite drevo za primer na gornji sliki in na kratko opišite postopek določitve iskanega intervala z uporabo takšnega drevesa.

(c) Opišite postopek gradnje takšnega drevesa. Kolikšna je časovna zahtevnost gradnje?

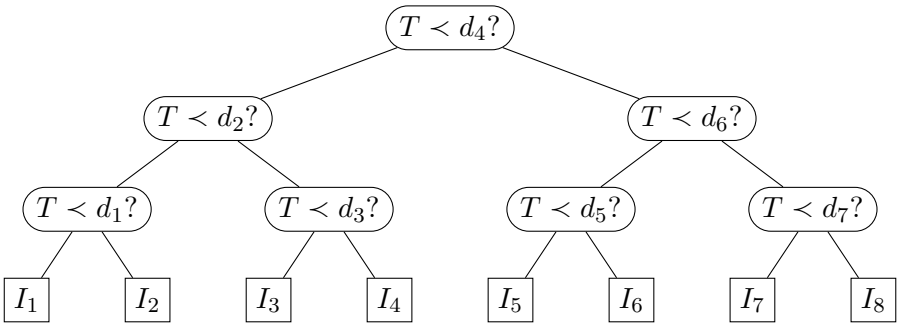
Rešitve

(a) Točka T se nahaja nad daljico AB natanko tedaj, ko vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AT}$ tvorita levi zasuk, torej ko je $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AT} > 0$. Ker je $\overrightarrow{AB} = (b - a, y_r - y_l)$ in $\overrightarrow{AT} =$

$(x-a, y-y_l)$, lahko iskani pogoj zapišemo kot

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AT} = (b-a)(y-y_l) - (x-a)(y_r-y_l) > 0.$$

(b) Naj zapis $T \prec d$ pomeni, da točka T leži nad daljico d.



Iskanje po takšnem drevesu je enostavno, saj se zgolj premikamo od korena proti listom v skladu z odgovori na vprašanja. Ko prispemo do lista, nam oznaka v listu razkrije iskani interval.

(c) Daljice uredimo po y-koordinatah njihovih središčih točk, za kar potrebujemo $O(n \log n)$ časa. Naj bodo $d_1, \ldots, d_n$ daljice, urejene na opisani način.

V primeru $n = 0$ je drevo sestavljeno iz enega samega lista, ki predstavlja edini interval, v nasprotnem primeru pa v koren postavimo vprašanje $T \prec d_{\lceil n/2 \rceil}$, nato pa rekurzivno zgradimo levo poddrevo za daljice $d_1, \ldots, d_{\lceil n/2 \rceil - 1}$ in desno poddrevo za daljice $d_{\lceil n/2 \rceil + 1}, \ldots, d_n$. Gradnja torej traja

$$T(n) = O(n \log n) + U(n)$$

časa, kjer je

$$U(n) = 2U(n/2) + \Theta(1).$$

Rešitev spodnje rekurenčne enačbe je $U(n) = \Theta(n)$, tako da je $T(n) = O(n \log n)$.

Če daljic ne bi vnaprej uredili, bi v rekurenčni enačbi namesto $\Theta(1)$ imeli $\Theta(n)$ (mediano bi potem morali poiskati z algoritmom hitrega iskanja) in bi vnovič prišli do $O(n \log n)$.