Kompleksna števila

Kompleksno število lahko razumemo kot algebraični izraz ali kot točko v ravnini. Prvi pogled je primeren za seštevanje in odštevanje, drugi pa razkrije geometrijski pomen množenja in deljenja. Cilj je, da med zapisoma prehajamo zavestno in da formule povezujemo s slikami.

Učni cilji

Po obravnavi boste znali:

- računati s kompleksnimi števili in razložiti konjugiranje;
- povezati absolutno vrednost z razdaljo;
- pretvarjati med kartezičnim in polarnim zapisom;
- razumeti množenje kot zasuk in razteg;
- zapisati preproste množice v kompleksni ravnini.

1 Kartezični zapis in osnovne operacije

Definicija: kompleksno število

Množica kompleksnih števil je

$$\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathrm{i}^2 = -1.$$

Števili $a = \mathrm{Re}(z)$ in $b = \mathrm{Im}(z)$ sta realni in imaginarni del števila $z = a + b\mathrm{i}$. Obe komponenti sta *realni števili*.

Število $a + b\mathrm{i}$ upodobimo s točko (a, b). Realna os je vodoravna, imaginarna pa navpična. Kompleksni števili sta enaki natanko tedaj, ko imata enaka realna in imaginarna dela.

Naj bosta $z = a + b\mathrm{i}$ in $w = c + d\mathrm{i}$. Po komponentah dobimo

$$z + w = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}, \tag{1}$$
$$z - w = (a - c) + (b - d)\mathrm{i}. \tag{2}$$

Pri množenju uporabimo distributivnost in $\mathrm{i}^2 = -1$:

$$zw = (a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) \tag{3}$$
$$= ac + ad\mathrm{i} + bc\mathrm{i} + bd\mathrm{i}^2 \tag{4}$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}. \tag{5}$$

Zgled: račun po komponentah

Za $z = 2 + \mathrm{i}$ in $w = 1 + 2\mathrm{i}$ je

$$z + w = 3 + 3\mathrm{i}, \qquad z - w = 1 - \mathrm{i}, \qquad zw = 5\mathrm{i}.$$

Pri produktu se realna prispevka 2 in -2 izničita. Produkt dveh neničelnih kompleksnih števil je lahko povsem imaginaren.

Opomba za razlago

Najprej narišemo z in w, nato zložimo puščici. Pri odštevanju narišemo $-w$ in uporabimo isto pravilo. Pred uvedbo polarnega zapisa vprašamo: »Kaj pa geometrijsko pomeni produkt?« Odgovor za nekaj trenutkov odložimo.

2 Konjugiranje, absolutna vrednost in deljenje

Definicija: konjugirano število in absolutna vrednost

Za $z = a + b\mathrm{i}$ definiramo

$$\overline{z} = a - b\mathrm{i}, \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Konjugiranje je zrcaljenje čez realno os, absolutna vrednost pa razdalja od izhodišča do točke z.

Ker je

$$z\overline{z} = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2 = |z|^2,$$

je ta produkt vedno nenegativno realno število. Zato za $z \neq 0$ velja

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}. \tag{6}$$

Deljenje torej prevedemo na množenje:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}, \qquad w \neq 0. \tag{7}$$

Zgled: odstranitev imaginarnega dela iz imenovalca

$$\frac{2 + \mathrm{i}}{1 + 2\mathrm{i}} = \frac{(2 + \mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i})}{(1 + 2\mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i})} = \frac{4 - 3\mathrm{i}}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i}.$$

Pomnožiti moramo *števec in imenovalec* z istim neničelnim številom.

Za razdaljo med z in w velja $d(z, w) = |z - w|$. Tako kot za realna števila velja trikotniška neenakost

$$|z + w| \leq |z| + |w|. \tag{8}$$

Kratka utemeljitev. Ker je $\mathrm{Re}(u) \leq |u|$, dobimo

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \leq (|z| + |w|)^2.$$

Tu uporabimo $|z\overline{w}| = |z||w|$, kar bomo spodaj pojasnili tudi geometrijsko. Obe strani sta nenegativni, zato smemo koreniti.

Razmislek: kako dobimo odštevanje?

V (8) nadomestimo w z $-w$ in dobimo $|z - w| \leq |z| + |w|$. Če zapišemo $z = (z - w) + w$, pa sledi tudi $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Obravnavajmo še zgled $|z| = |z-1| = 1$. Iščemo presečišči enotskih krožnic s središčema 0 in 1. Za $z = x + y\mathrm{i}$ enačbi pomenita

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Z odštevanjem dobimo $x = 1/2$, nato $y = \pm\sqrt{3}/2$. Rešitvi sta $z = 1/2 \pm (\sqrt{3}/2)\mathrm{i}$.

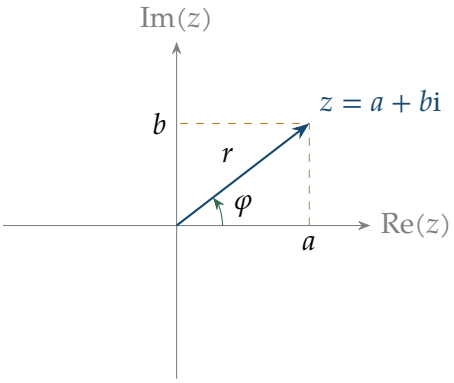
3 Polarni zapis in koti

Definicija: polarni zapis

Za $z \neq 0$ sta $r = |z| > 0$ in kot φ določena z

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \qquad a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi. \tag{9}$$

Koti $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, predstavljajo isto smer. Glavni argument $\operatorname{Arg} z$ izberemo v $[0, 2\pi)$.



En radian je kot, ki na enotski krožnici odreže lok dolžine 1. Zato je polni obrat 2π radianov in

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad 180^\circ = \pi.$$

Za pretvorbo iz stopinj v radiane kot pomnožimo s $\pi/180$.

Pozor: argument ničle in izbira kvadranta

Ničla ima modul 0, nima pa določene smeri. Izraz $\arctan(b/a)$ sam ne zadošča za določitev argumenta: nasprotni točki imata isto razmerje b/a. Vedno upoštevamo predznaka obeh komponent; pri računanju je uporabna funkcija $\operatorname{atan2}(b, a)$.

Zgled: značilne točke

z	$\lvert z\rvert$	$\operatorname{Arg} z$
1	1	0
-1	1	$\pi = 180^\circ$
i	1	$\pi/2 = 90^\circ$
$-\mathrm{i}$	1	$3\pi/2 = 270^\circ$
$1+\mathrm{i}$	$\sqrt{2}$	$\pi/4 = 45^\circ$
$-1-\mathrm{i}$	$\sqrt{2}$	$5\pi/4 = 225^\circ$

4 Eulerjev zapis in geometrija množenja

Eulerjeva formula povezuje krožnico in kompleksno eksponentno funkcijo:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad z = re^{i\varphi}. \tag{10}$$

V teh zapiskih jo uporabljamo kot poznano zvezo. Izrek o kompleksni eksponentni funkciji zahteva njeno predhodno definicijo. Navedena zveza sama zato še ni dokaz iz realne definicije eksponentne funkcije.

Za seštevanje kotov pa lahko zvezo preverimo neposredno:

$$\begin{aligned}&(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi)\\ &\quad = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)\\ &\quad = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi).\end{aligned}$$

Množenje je zasuk in razteg

Za $z = re^{i\varphi}$ in $w = se^{i\psi}$ velja

$$zw = rse^{i(\varphi+\psi)}, \qquad |zw| = |z||w|.$$

Množenje z neničelnim w zavrti vsako točko za ψ in jo oddalji od izhodišča za faktor $s > 0$. Vrstni red zasuka in raztega ni pomemben.

Ker je $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$, se modul pri zasuku ohrani. Faktor s je nenegativen modul, ne kompleksno število; če je $0 < s < 1$, gre pravzaprav za skrčitev. Pri $w = 0$ se vse točke preslikajo v izhodišče in o zasuku ne govorimo.

Za $z \neq 0$ in $w \neq 0$ dobimo še

$$\overline{z} = re^{-i\varphi}, \qquad z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}, \qquad \frac{z}{w} = \frac{r}{s}e^{i(\varphi-\psi)}. \tag{11}$$

Konjugiranje obrne predznak kota, deljenje pa odšteje kota in deli modula. Koti v teh formulah so določeni do celih obratov.

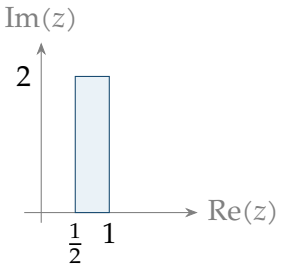
5 Množice v kompleksni ravnini

Množico najlaže opišemo tako, da najprej povemo, kaj pogoj meri: realni del meri vodoravno koordinato, imaginarni del navpično, modul razdaljo in argument smer.

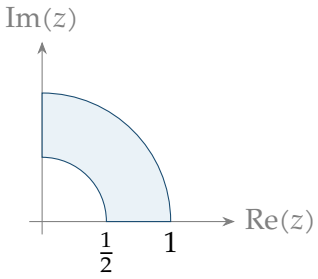
Zgled: štiri množice

Pri naslednjih množicah zaradi enotnosti vključimo rob, razen kadar je izrecno zapisano drugače.

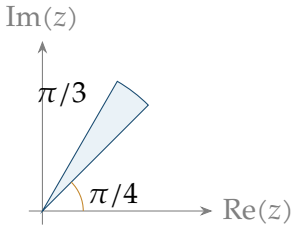
1. Pravokotnik: $\{z \mid \frac{1}{2} \le \mathrm{Re}(z) \le 1, 0 \le \mathrm{Im}(z) \le 2\}$.
2. Četrtina kolobarja: $\{re^{i\varphi} \mid \frac{1}{2} \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\}$.
3. Kotni izsek: $\{re^{i\varphi} \mid r > 0, \pi/4 \le \varphi \le \pi/3\}$.
4. Premaknjen kolobar: $\{z \mid r_1 \le |z - c| \le r_2\}$, s središčem c in $0 < r_1 < r_2$.



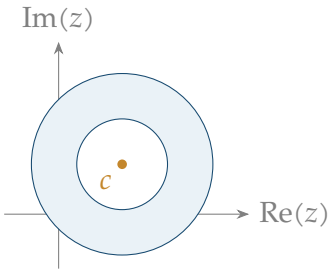
Pravokotnik



Četrtina kolobarja



Kotni izsek (prikazan je le del)



Premaknjen kolobar

Zapis $z = c + re^{i\varphi}$ pomeni premik za c, zapis $z = re^{i\varphi} - c$ pa premik za $-c$. To ni isti premik. Pri neenačbi $|z - c| < r$ krožnica ni vključena; pri $|z - c| \leq r$ je vključena.

Opomba za razlago

Za vsako množico izberemo eno notranjo, eno zunanjo in eno robno točko. Vstavimo jih v pogoj. Tako preverimo opis brez zanašanja samo na skico.

6 Potence in koreni

Kartezični zapis je za visoke potence pogosto neroden. Polarni zapis pokaže, da se pri ponavljajočem množenju moduli potencirajo, koti pa seštevajo.

Učni cilji

- uporabiti de Moivrovo formulo;
- izračunati vse n-te korene kompleksnega števila;
- utemeljiti število različnih korenov in njihovo razporeditev;
- preveriti rešitev s potenciranjem.

6.1 Potenciranje in periodičnost

Za $z = re^{i\varphi}$ in $n \in \mathbb{N}_+$ velja

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)). \tag{12}$$

To je de Moivrova formula. Sledi z zaporedno uporabo formule za produkt ali z indukcijo. Za $n = 1$ velja po definiciji; če velja za n, z množenjem z z dobimo modul r^{n+1} in kot $(n+1)\varphi$.

Zgled: dvanajsta potenca

Ker je

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6},$$

dobimo

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{12} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1.$$

Vsak korak pomeni zasuk za 30°. Po dvanajstih korakih je opravljen polni obrat. Za celo k velja $\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}} = 1$.

6.2 Kako dobimo vse korene?

Rešujemo $z^n = a$. Predpostavimo najprej $a \neq 0$ in pišimo $a = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, kjer sta $\rho > 0$ in $\theta = \operatorname{Arg} a$. Če je $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, mora veljati

$$r^n = \rho, \qquad n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Modul ima eno pozitivno rešitev $r = \rho^{1/n}$, argumentov pa je več.

Vsi n-ti koreni neničelnega števila

Za $n \in \mathbb{N}_+$ in $a = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0$ so vse različne rešitve

$$z_k = \rho^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{13}$$

Vsi koreni imajo isti modul. Sosednja kota se razlikujeta za $2\pi/n$.

Zakaj natanko n? Če sta $z_k = z_\ell$, je $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(k-\ell)/n} = 1$, torej je $k-\ell$ večkratnik n. Za $0 \leq k, \ell < n$ to pomeni $k = \ell$. Indeks $k + n$ pa res vrne isti koren kot k. S tem dobimo vse in samo različne rešitve.

Pri $n \geq 3$ so koreni oglišča pravilnega n-kotnika s središčem v izhodišču. Pri $n = 2$ dobimo nasprotni točki. Če je $a = 0$, je edina rešitev $z = 0$; kot ničle v postopku ni potreben.

Pozor: kompleksni koren ni samodejno ena vrednost

Zapis $a^{1/n}$ brez dogovora lahko zakrije druge korene. Pri reševanju enačbe $z^n = a$ vedno zapišemo celotno množico rešitev. Pozitivni realni koren modula $\rho^{1/n}$ pa je enolično določen.

6.3 Trije zgledi korenjenja

Zgled: enačba $z^3 = \mathrm{i}$

Uporabimo $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$. Po (13) so koreni

$$z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/6+2k\pi/3)}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Zato je množica rešitev

$$\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}, \mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/6}, \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/2}\} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}, -\mathrm{i}\right\}.$$

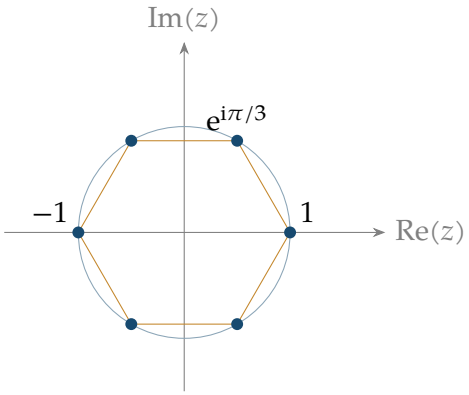
Koti so $30°$, $150°$ in $270°$. Vsak izmed njih se pri potenciranju s 3 preslika v $90°$ do celih obratov.

Zgled: šesti koreni enote: $z^6 = 1$

Ker je $1 = \mathrm{e}^{0\mathrm{i}}$, so rešitve

$$z_k = \mathrm{e}^{k\pi\mathrm{i}/3}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

Na enotski krožnici ležijo v kotih $0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°$.



Zgled: enačba $2z^4 + 1 = \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Najprej osamimo potenco:

$$z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}.$$

Četrti koreni imajo kote

$$\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \qquad \text{torej } 30°, 120°, 210°, 300°.$$

Rešitve so

$$\left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \right\}.$$

Končne kote dobimo tako, da začetnemu kotu prištejemo večkratnike razmika $\pi/2$. Ne pozabimo začetnega zasuka za $\pi/6$.

6.4 Kratka razlaga potenc in korenov

Pri množenju kompleksnih števil se moduli množijo, koti pa seštevajo. Zato ima n-ta potenca števila $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ modul r^n in kot $n\varphi$. Na enotski krožnici je $r = 1$, zato potenciranje spreminja le smer. Na primer $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6})^{12} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$: dvanajst zasukov za $30°$ pomeni en polni obrat.

Pri korenjenju postopek obrnemo. Če želimo $z^n = a$ za $a = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0$, potrebujemo modul $\rho^{1/n}$ in kote

$$\frac{\theta}{n}, \quad \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Vsi ti koti se po množenju z n razlikujejo od θ za cel obrat, zato dajo isto število a. Dobimo n enakomerno razporejenih korenov. Rešitev preverimo v prvotni enačbi; denimo $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6})^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$.