

NM

PO4

Iterativne metode : $A = M + N$

Reševanje $\left\{ \begin{array}{l} Ax = b \text{ prevedemo na:} \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} (M + N)x = b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Mx = -Nx + b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Mx^{(m+1)} = -Nx^{(m)} + b \end{array} \right. \quad (\text{rešimo lin. sistem za matriko } M)$$

Dva namrekljiva si cilja:

① sistem z M naj bo računsko čim cenejši

② $\|R\| = \| -M^{-1}N \|$ naj bo čim manjši

Pišimo

$$A = L + D + U$$



JACOBIJEVA ITERACIJA

Vzamemo $M = D$, $N = L + U$.

Iteracije: $Dx^{(m+1)} = b - (L + U)x^{(m)}$

Po vrsticah
$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(m)} \right), \quad i=1, 2, \dots, n$$

Računski zahtevnost: će je u svakoj vrstici matrice A najviše m nenulnih elementov, potom za svak korak iteracije potrebno je $\Theta(m \cdot n)$ operacija.

GAUSS-SEIDLOVA ITERACIJA

Vzamenos $M = L + D$, $N = U$.

Iteracije: $(L + D)x^{(m+1)} = b - Ux^{(m)}$

Po vrsticama $\sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(m+1)} + a_{ii} x_i^{(m+1)} = (b_i - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(m)})$

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(m)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

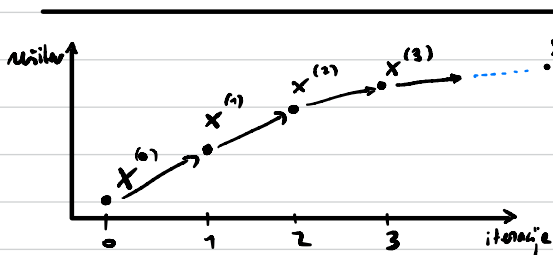
Računski zahtevnost: će je u svakoj vrstici matrice A najviše m nenulnih elementov, potom za svak korak iteracije potrebno je $\Theta(m \cdot n)$ operacija.

SOR (successive over-relaxation)

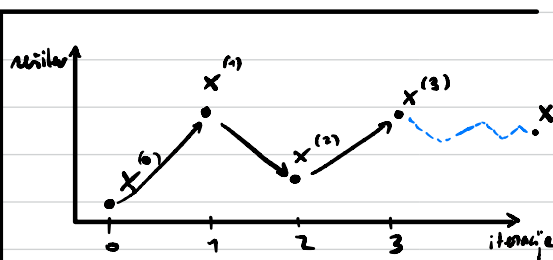
Vpeljemo relaksacijski parameter $w \in \mathbb{R}$, da pospešimo GS iteracijo.

$$x_i^{(m+1)} = (1-w) x_i^{(m)} + w x_{GS,i}^{(m)}$$

$w=1 \Rightarrow$ GS iteracije



pospešimo iteracijo, če
izberemo $w > 1$



pospešimo iteracijo, če
izberemo $w < 1$

Optimalnega w običajno ni mogoče določiti.

Konvergenčni kriteriji

Matrika je **kreepko vrstično diagonalno dominantna (kVDD)**, če za vsak i velja

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

Diagonalno dominantne matrike velikokrat nastopajo pri reševanju parcialnih diferencialnih enačb z metodo diskretizacije.

Nekaj konvergenčnih rezultatov:

1. Jacobijeva in GS iteracija za kVDD matrike vedno konvergirata. GS je hitrejša.
2. V primeru enakosti v kVDD pogojih za konvergenco Jacobija in GS potrebujemo dodatno lastnost matrike A - **nerazcepnost**.
3. Potreben pogoj za konvergenco $SOR(w)$ je $0 < w < 2$. Za pozitivno definitno matriko A je pogoj tudi zadosten.
4. Primerjavo hitrosti konvergence metod lahko naredimo za matrike A , katerih graf sosednosti je dvodelen. Hkrati lahko za take določimo optimalen w v $SOR(w)$.