

N M

P04

# Reševanje nelinearnih enačb in optimizacija

$$* f(x) = 0$$

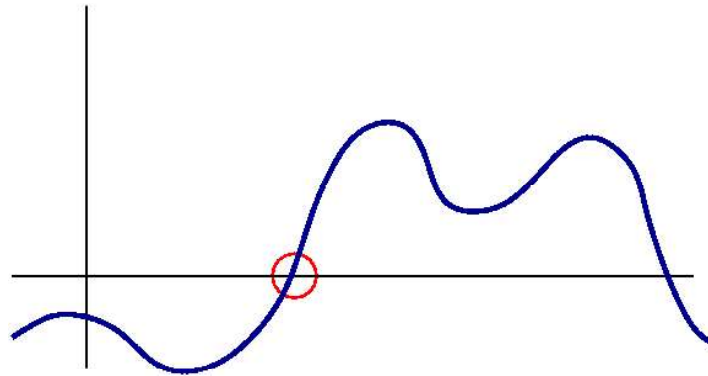
$$* f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$* \min\{f(x) : x \in K \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

- ▶ Ena enačba v eni spremenljivki: Bisekcija, tangentna metoda, sekantna metoda, regula falsi, navadna iteracija
- ▶ Sistem  $n$  enačb v  $n$  spremenljivkah: Newtonova metoda, Broydenova metoda
- ▶ Optimizacija: Gradientni spust

## Motivacija

**Problem:** Naj bo dana <sup>rešena</sup> funkcija  $f(x)$ . Poišči  $x$ , ki zadošča  
$$f(x) = 0.$$



- ▶ **Nelinearni sistemi niso tako enostavno rešljivi** kot sistemi linearnih enačb.
- ▶ Ničel polinoma stopnje 5 ne moremo zapisati analitično.
- ▶ Kako reševati take probleme? Z **iterativnim postopkom**, pri čemer se rešitvam čim bolj približamo.

$x_0, x_1, x_2, \dots, x$  (točna rešitev)

- ▶ **Obstoj in enoličnost rešitve?**

DEF. (hitrost konvergence)

Metoda ima red konvergence v okolici ničle  $x$  enak (vsaj)  $p$ , če

$$|x_{i+1} - x| \leq C \cdot |x_i - x|^p$$

za nek  $C > 0$ .

za  $p=1$  mora dodatno veljati  $C < 1$ .

## Bisekcija

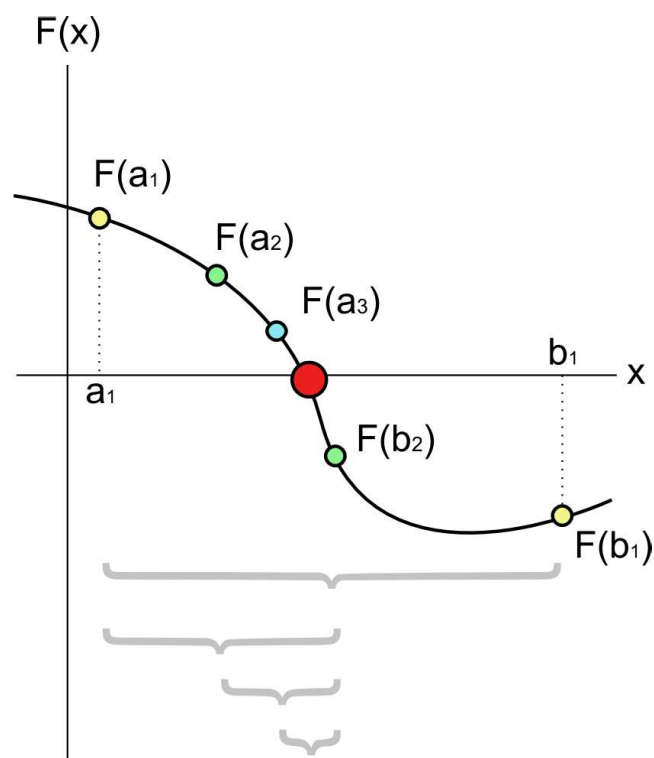
Razpolovišče začetnega intervala  $[a, b]$  je točka

$$x_m = \frac{1}{2}(a + b).$$

### Postopek:

1. Poišči razpolovišče.
2. Izmed dveh možnih intervalov izberi tistega, kjer ima funkcija različno predznačeni krajišči.
3. Nadaljujemo s prvim korakom.
4. Ustavimo se, ko je interval krajši od naprej predpisane tolerance.

Predpostavka: funkcija  $f$  je različno predznačena na roboveh intervala.



## Algoritem za bisekcijo

```
1  Vhod: funkcija  $f$ , krajisci  $a, b$ , toleranca  $tol$   
2  Izhod: priblizek  $x^*$  za  $f(x) = 0$  z  $|x - x^*| < tol$   
3  
4  for  $k = 1, 2, \dots$   
5       $x_m = a + (b - a)/2$  (razpolovišče intervala)  
6      if  $\text{sign}(f(x_m)) = \text{sign}(f(a))$   
7           $a = x_m$  (vrzamo desni podinterval)  
8      else  
9           $b = x_m$  (vrzamo levi podinterval)  
10     end  
11     if  $|b - a| < tol$ , stop (končaj, ko interval  
12     end                dovolj majhen)
```

[Algoritem: klik](#)

[Primer 1: klik](#)

[Primer 2: klik](#)

## Hitrost konvergence in računska zahtevnost

Naj bo  $\delta_n$  velikost intervala po  $n$ -tem koraku bisekcije. Potem velja

$$\delta_0 = b-a, \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\delta_0, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\delta_1 = \frac{1}{4}\delta_0, \quad \dots, \quad \delta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta_n}{\delta_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{-n} \quad \text{ali} \quad n = -\log_2 \left( \frac{\delta_n}{\delta_0} \right) = -\frac{\log_2 \frac{\delta_n}{\delta_0}}{\log_2 2}$$

| $n$ | $\frac{\delta_n}{\delta_0}$ | število izračunov<br>funkcijskih vrednosti |
|-----|-----------------------------|--------------------------------------------|
| 5   | $3.1 \times 10^{-2}$        | 7                                          |
| 10  | $9.8 \times 10^{-4}$        | 12                                         |
| 20  | $9.5 \times 10^{-7}$        | 22                                         |
| 30  | $9.3 \times 10^{-10}$       | 32                                         |
| 40  | $9.1 \times 10^{-13}$       | 42                                         |
| 50  | $8.9 \times 10^{-16}$       | 52                                         |

Konvergenca ni monotona, v limiti  
velja:  $\text{red} = 1, \quad c = \frac{1}{2}$

1) Dane je funkcija  $f(x) = -x^3 + 9x + 12$  na intervalu  $[0, 4]$ .

a) skicirajte funkcijo  $f$  in dokažite, da ima  $f$  ničlo na danem intervalu.

b) Določite minimalni zračni približek za metodo bisekcije za iskanje ničle funk.  $f$ . Izračunajte približek za ničlo z uporabo štirih korakov metode.

c) Koliko korakov bi potrebovali, da bi bila napaka za približek ničle zagotovo manjša od  $10^{-6}$ ?

---

a)  $f$  :

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| 0   | 12  |
| 1   | 20  |
| 2   | 22  |
| 3   | 12  |
| 4   | -16 |

} ničle

b)  $a = 3, b = 4, c = 3.5, 3.75, 3.625, 3.5625$

c) 
$$\frac{\log\left(\left(\frac{1}{10^{-6}}\right)\right)}{\log 2} \approx 19.9.$$

Potrebujemo naj 20 korakov