Uvod

Teden 1

1.1 Indukcija
1.2. Abs
1.3. $\mathbb{C}$ kartezično

- Dobrodošlica
- Start: Predavanja & vaje z akademskih 15

  Kolokviji & izpiti, DN (neobvezno)
- Obkod čez učilnico, vprašanja: predavanja, vaje, tutorske ure, forum
- Predznanje MM @ FE, Sokratični AI
- Razumevanje vs. "učenje na pamet". Vsebina = "intuitivna matematika": približki, hitrost, ...
- spraševajte, išči te napake (npr. minuse)

Števila

Def: Naravna števila $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ za štetje. lahko vsebujejo 0 ← ne za Cefa, Rimljane; ✎ da za računalnik

ORODJE: Princip indukcije (efekt domin)

Za $A \subset \mathbb{N}$ naj velja:
- $n_0 \in A$
- $\forall k$: če $k \in A$, tedaj $k+1 \in A$.

Potem $A \supseteq \{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$

$\forall$ ← "vsak"
$\exists$ ← "obstaja"

Zanka v računalništvu

Shema uporabe: Radi bi dokazali trditev $T(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Postopek:

ⓐ Baza indukcije:

Dokažemo $T(1)$

ⓑ Indukcijski korak:

Predpostavimo $T(k)$.

Dokažemo $T(k+1)$.

Primer uporabe:

$T(n)$: $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

ⓐ $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ ✓

ⓑ Naj velja I.P.

$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Dokazujemo

$1+2+\dots+n+(n+1) \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$\frac{n(n+1)}{2}$ $\quad$ $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ✓

Primeri: Dokaži $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Vprašanje: Naj bo $T(n)$ trditev o $n \in \mathbb{N}$.

Vemo/da: (a) Velja $T(3)$

(b) Iz $T(k)$ sledi $T(k+4)$.

Ali lahko sklepamo, da velja $T(2022)$? Koliko bi moral biti: kaos?

V $\mathbb{N}$ ni (vedno) odštevanja, t.j. rešitev $5+x=2$. So pa rešitve v...

Def: Cela števila $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

V $\mathbb{Z}$ ni (vedno) deljenja, t.j. rešitev $5x=2$. So pa rešitve v...

Def: Racionalna števila $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} ; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ ⇐ lahko delimo razen z 0!

V $\mathbb{Q}$ ni (vedno) "Koncev intervalov", npr. $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$.

Def: Realna števila $\mathbb{R}$ predstavljajo vse točke na številski premici.

(oz. vse potencialne konce poltvalov oz. intervalov v $\mathbb{Q}$.)

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ iracionalna števila: $\sqrt{2}$ (študent Pitagore), π ($\pi := 4$ almost law), e
- neskončni decimalni zapis $x = \pm n.d_1 d_2 d_3 \dots$ ($n \in \mathbb{N}$, $d_i \in \{0,1,\dots,9\}$)

kaj je sodaj s "konci intervalov"?

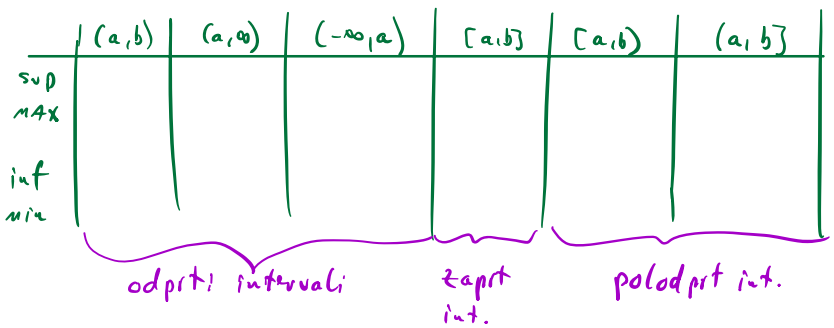
ni enoličen:

$0.99\dots = 1$

- Naj bo $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ (prazna množica). Množica A je:
  - Navzgor omejena, če $\exists M \in \mathbb{R}: x \leq M \ \forall x \in A$. ($M$: zgornja meja)
  - Najmanjša zgornja meja vedno obstaja v $\mathbb{R}$, imenuje se supremum. Oznaka: $\sup(A)$.
  - če je $\sup(A) \in A$, se imenuje maksimum $MAX(A)$.

- Analogni pojmi za omejenost navzdol:
  - spodnja meja
  - infimum $\inf(A)$
  - minimum $\min(A)$

Primeri: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$



Def: Absolutna vrednost $|x|$ števila $x \in \mathbb{R}$ je oddaljenost števila x od 0 na številski premici:

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$ [pogojni stavek]

Razdalja med številoma x in y je enaka $|x-y|$.

Lastnosti:
- $|x| \geq 0$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$

Primeri: Izračunaj in nariši

$|x-5| \leq 2$

$|x+1| = |x-3|$

2 vgnezdena ⇒ pogojna stavka.

$||x-3|-2x| > 2$

$|x| + |y| < 1$

☆ Astra

V $\mathbb{R}$ ni (vedno) korenjenja, tj. rešitev $x^2 = -1$ bi bila $\sqrt{-1}$

$x^2 = 5 \rightsquigarrow x = \sqrt{5}$ $\quad$ $x^2 = -5 \rightsquigarrow x = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5}$

$\sqrt{-1}$ → novo število i velja $\boxed{i^2 = -1}$

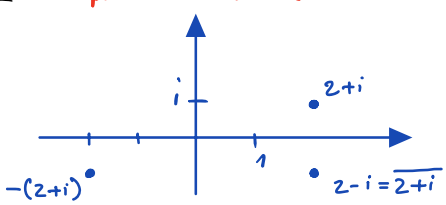
Def: Kompleksna števila dobimo, če $\mathbb{R}$ dodamo i ter tvorimo vse vsote in produkte.

$$\mathbb{C} = \{ a+bi ;\ a, b \in \mathbb{R} \}$$

$z = a+bi$ $\quad$ $a = Re(z)$ Realni del

$b = Im(z)$ Imaginarni del

Model: Kompleksna ravnina



← kot vektorji

Računanje v $\mathbb{C}$:

- vsota $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$
- množenje $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$ ← upoštevamo $i^2 = -1$
- deljenje $\dfrac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1+2-i+2i}{1+1} = \dfrac{3+i}{2}$

trik: spodaj $a+bi$ množimo z $a-bi$

- konjugiranje: $z = a+bi \Rightarrow$ konjugirano število $\bar{z} = a-bi$

lastnost: $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ ... (razdalja z do 0)^2

Def: Absolutna vrednost z:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Razdalja med z_1 in z_2 v $\mathbb{C}$ je $|z_1 - z_2|$.

Lastnosti $|z|$:

- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Lastnosti $\bar{z}$:

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$
- $Re\, z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad$ $Im\, z = \dfrac{z-\bar{z}}{2}$

Primer: • Reši $2\bar{z} - z^2 = 0$

Rešitev: $2x - 2iy - x^2 + y^2 - 2xyi = 0$

Re ↙ Im ↘

Ⅰ $2x - x^2 + y^2 = 0$

Ⅱ $-2iy - 2xyi = 0 \quad / : (-2yi)$

$1 + x = 0$

$x = -1$

Ⅰ

$-2 - 1 + y^2 = 0$

$-3 + y^2 = 0$

$y = \pm\sqrt{3}$

$y = 0$

Ⅰ

$2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0$

$x = 0$ ali $x = 2$

Rešitev: $-1 + i\sqrt{3}$ $\quad$ 0

$-1 - i\sqrt{3}$ $\quad$ 2 ■

• $z\bar{z} = 1$ • $\overline{\bar{z}} = z$ • $\bar{z}^2 = z^2$ • $|z + i| < |z - 1|$