C (nadaljevanje)

1. Polarni zapis.
   - množenje v pol. zapisu
2. Izrazi v polarnem zapisu
   - geometrija operacij v $\mathbb{C}$
   - Koreni primer
3. Koreni enote
   - osnovni izrek algebre

Teden 2

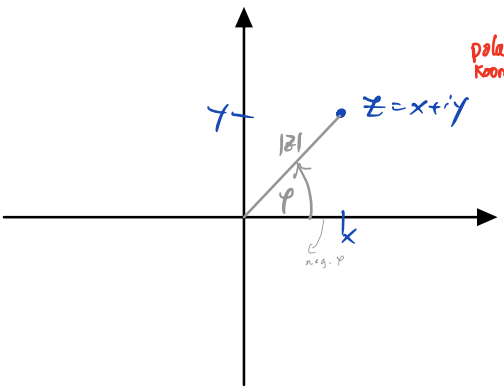
Teden 3 DFT

Polarni zapis kompleksnega števila:

Kartezični zapis

$$z = x + iy$$

Kartezični koordinati:
$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$



Polarni koordinati:
- $r = |z|$ oddaljenost od $0 \in [0, \infty)$ enoličen
- $\varphi = \arg(z)$ kot $\in \mathbb{R}$ NI ENOLIČEN
  - pri $r = 0$ nima vpliva

POLARNI ZAPIS

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \rightsquigarrow \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

Polarni kot ali argument

↳ upoštevati moramo kvadrant in $\pm\infty$

↳ določen do $+k\cdot 2\pi$ natančno.

Primer: Zapiši v polarni obliki:

- $z = 1 + i$

$r = \sqrt{2}$ $\quad \tan\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

I. kvadrant

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right)$$

- $z = -1 - i$

$r = \sqrt{2}$

$\varphi = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$ } III. kv

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(-\tfrac{\pi}{2}) + i\cdot\sin(-\tfrac{\pi}{2})\right)$$

Primer: Narišimo množici:

$$A = \{x + iy;\ x \in [1,2],\ |y| < 1\}$$

$$B = \{r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi);\ r \leq 2,\ \varphi \in (0, \pi)\}$$

} Rešimo še kakšno tako nalogo.

Množenje v polarnem zapisu

$$z_j = |z_j| \cdot (\cos\varphi_j + i \sin\varphi_j)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

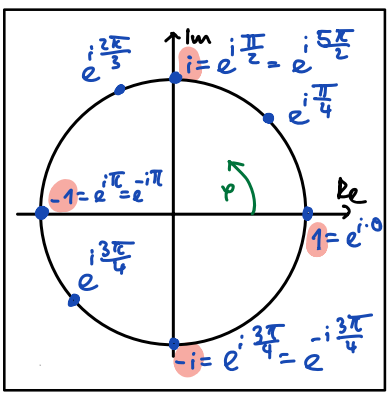
$$= |z_1|\cdot|z_2| \cdot \big((\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1) \big)$$

$$|z_1\cdot z_2| \big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \sin(\varphi_1+\varphi_2) \big)$$

Eulerjeva formula (zaenkrat le zapis, bo sledila iz Taylorjeve vrste):

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

$$e^{i\pi} = -1$$



Krajši polarni zapis

$$z = r\cdot e^{i\varphi}$$

formula za množenje

$$z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

Uporabljamo $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (r_1\cdot r_2)\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$$

produkt abs. vr. vsota kotov

Q: Kaj je $\{e^{i\varphi};\ \varphi\in\mathbb{R}\}$?
kako pa spiroli v + in - smer?

Polarna oblika za množenje kartezična za seštevanje.

Igranje v polarnem zapisu:

- $r_1\cdot e^{i\varphi_1} = r_2\cdot e^{i\varphi_2} \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 0$ ali $r_1 = r_2$ in $\varphi_1 - \varphi_2 = k\cdot 2\pi$ za nek $k\in\mathbb{Z}$ (bolj kompliciran kot v kartezičnem!)
- $\overline{r\cdot e^{i\varphi}} = r\cdot e^{-i\varphi}$
- $(r\cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$ ← De Moivre-ova formula
- $(r\cdot e^{i\varphi})^{-1} = r^{-1}\cdot e^{-i\varphi}$ za $r\neq 0$
- $\frac{r_1\cdot e^{i\varphi_1}}{r_2\cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ za $r_2\neq 0$

Primeri: • Za $z = 1 - i\sqrt{3}$ narišimo $z, z^2, z^3, \dots, z^{-1}, \overline{z}$.

• Narišimo $(1+i)(1-i)$

Geometrija operacij v ravnini: → s kvaternioni se razširi v $\mathbb{R}^4$ (ali pa geometrijske algebre, ali pa matrike)

Narišimo sliko:

preslikava	transformacija
$z \mapsto \overline{z}$	zrcaljenje preko x osi
$z \mapsto -z$	zrcaljenje preko 0
$z \mapsto z + z_0$	premik za z_0
$z \mapsto z \cdot e^{i\alpha}$	rotacija za kot α
$z \mapsto z \cdot r \cdot e^{i\varphi}$	raztег za faktor r, rotacija za φ.

Primeri: V kaj se s predpisom $z \mapsto (1+i) \cdot z$ preslika:

• krog $|z| \leq 1$

• območje $\{z;\ |z| \leq 1,\ \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$

• kvadrat $|x| + |y| \leq 1$.

Koreni enote

Rešimo enačbo $z^5 = 1$

$r^5 \cdot e^{i5\varphi} = 1 \cdot e^{i\cdot 0} = 1 \cdot e^{i2\pi} = \dots$

$r = 1$

$\varphi_1 = 0$
$\varphi_2 = \frac{2\pi}{5}$
$\varphi_3 = \frac{4\pi}{5}$
$\varphi_4 = \frac{6\pi}{5}$
$\varphi_5 = \frac{8\pi}{5}$
$\varphi_6 = \frac{10\pi}{5} = 2\pi$

Rešitve:

$z_1 = 1 = 1 \cdot e^{i\cdot 0}$

$z_2 = 1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{5}}$

$z_3 = 1 \cdot e^{i\frac{4\pi}{5}}$

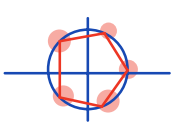
$z_4 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$

$z_5 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{-i\frac{2\pi}{5}}$

$z_6 = e^{i2\pi} = 1 = z_1$

5 rešitev sestavljajo pravilni 5-kotnik

slika



Formula za korenjanje:

$z^n = r \cdot e^{i\varphi}$

$$\Downarrow$$

$$z_i = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

n različnih rešitev, razen če $r = 0$.
Njihova vsota je 0, saj sestavljajo stranice pravilnega n-kotnika.

Primer: • Reši $(z^3 - 2)(z^2 + i) = 0$

• Izračunaj $\left(\frac{1-i}{i}\right)^{2022}$.

Sedaj znamo potencirati kompleksna števila na potence $\in \mathbb{Q}$. Za iracionalne potence je težje (∞ izidov).

Osnovni izrek algebre

$p(z)$ ... polinom stopnje n

Vsaka enačba $a_n z^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, kjer so $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$,

ima rešitev v $\mathbb{C}$. Še več, ima natanko n rešitev v $\mathbb{C}$.

→ polinom stopnje n se da zapisati kot

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \qquad z_i \in \mathbb{C}$$

natanko vse rešitve $p(z) = 0$.

→ če so koeficienti realni ($a_j \in \mathbb{R}, \forall j$) potem kompleksne ničle nastopajo v konjugiranih parih.

$$p(z) = a_n \underbrace{(z - x_1) \cdots (z - x_k)}_{\text{realne ničle}} \underbrace{(Q_1) \cdots (Q_{\frac{n-k}{2}})}_{\text{ničle iz konjugiranih parov}}$$

$x_i \in \mathbb{R}$

Q_i: kvadratni polinom s koef. v $\mathbb{R}$, nerazcepen v $\mathbb{R}$.

Primer: • $z^4 = 1$ • $z^5 = 32$

Primer: Dokaži, da za vektorja $a = \left(e^{i2\pi\cdot 0}, e^{i2\pi\cdot\frac{1}{4}}, e^{i2\pi\cdot\frac{2}{4}}, e^{i2\pi\cdot\frac{3}{4}}\right)$

ogrevanje za DFT

in $b = \left(e^{i2\pi\cdot 0}, e^{i2\pi\cdot\frac{2}{4}}, e^{i2\pi\cdot\frac{4}{4}}, e^{i2\pi\cdot\frac{6}{4}}\right)$

① velja $a \cdot \overline{a} = 4 = b \cdot \overline{b}$ → skalarni produkt: $(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot (w_1, w_2, \dots, w_n) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$

② velja $a \cdot \overline{b} = 0$:

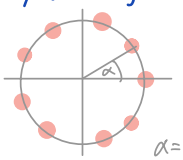
$$a \cdot \overline{b} = \underbrace{e^{i2\pi\cdot 0} + e^{-i2\pi\cdot\frac{1}{4}} + e^{-i2\pi\cdot\frac{2}{4}} + e^{-i2\pi\cdot\frac{3}{4}}}_{\text{rešitve } z^4 = 1} = 0.$$

DFT: Diskretna Fourierjeva transformacija

(iz predmeta ALGORITMI IN PODATKOVNE STRUKTURE na FRI, in DIGITALNA OBDELAVA SIGNALOV na FE)

Motivacija: Spektralna dekompozicija: sluh, glasba, EM valovanje, barve, spektroskopija, signal za telefone, radio valovi, walkie-talkie, MRI, noise cancelling, bulba's head, jamming

Zgodba: Izberimo "resolucijo" $N = 2^m$ za $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$:



signal pri frekvenci k: $c_k = \left(e^{2\pi i \cdot \frac{0\cdot k}{N}}, e^{2\pi i \cdot \frac{1\cdot k}{N}}, e^{2\pi i \cdot \frac{2\cdot k}{N}}, \dots, e^{2\pi i \cdot \frac{(N-1)k}{N}} \right) = \left(e^{2\pi i \cdot \frac{k\cdot n}{N}} \right)_{n=0}^{N-1}$

frekvenca

razporejene $\sqrt[N]{1}$

naredi k-obhodov

Merimo signal, ki je kombinacija večih frekvenc:

(*) $X = (X_0, \dots, X_{N-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \cdot c_k$

$Y_k = r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$

r = jakost signala

φ = zamik

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

Izrek: Vsak signal ima tako enolično dekompozicijo.

Primer: ① $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

$\left(\cos \frac{k\cdot n}{N} \right)_{n=0}^{N-1} = \frac{1}{2} c_k + \frac{1}{2} \overline{c_k}$

$= \frac{1}{2} c_k + \frac{1}{2} c_{N-k}$

② $\sin x = \frac{-i}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$

$\left(\sin \frac{k\cdot n}{N} \right)_{n=0}^{N-1} = \frac{-i}{2} c_k + \frac{i}{2} c_{N-k}$

Izrek: Za realne signale je $c_p = \overline{c_{N-p}}$.

③ $\left(\cos \frac{kn}{N} + \sin \frac{k\cdot n}{N} \right)_{n=0}^{N-1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) c_k + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) c_{N-k} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} c_k + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} c_{N-k} =$

$= 2 \cdot \mathrm{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i(2\pi \frac{kn}{N} - \frac{\pi}{4})} \right]_{n=0}^{k-1} = \sqrt{2} \left(\cos \left(2\pi \frac{kn}{N} - \frac{\pi}{4} \right) \right)_{n=0}^{k-1} \right.$

Sestavanje signalov: seštejemo koeficiente Y_k in rezultat zapišemo v polarnih koord.

jamming, noise canc., bulba's head

Zaključek: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$. Torej signalov pri isti frekvenci ne moremo ločiti.

Načrt: Pokažimo, da lahko ločimo signale pri različnih frekvencah.

Vprašanje: Kako iz signala X (*) dobiti jakost frekvenc $Y = (Y_0, \dots, Y_{N-1})$, oz. rešimo sistem (*)?

$(x_0, \dots, x_{N-1}) \rightsquigarrow (Y_0, \dots, Y_{N-1})$

zaporedje jakosti — zap. frekvenc

Odgovor: DFT. Je poseben primer konvolucije (cNN).

→ šablone, ki rešijo naš problem

Def: $Y_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i 2\pi \frac{k\cdot n}{N}} = X \cdot \overline{c_k}$

skal. produkt

Glej primer prej DFT.

Dokaz pravilnosti:

lemma: $C_p \cdot \overline{C_q} = \begin{cases} N & p=q \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$

$\frac{1}{\sqrt{N}} C_n$ are ONB

(*) $\quad X = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \cdot C_n \qquad / \cdot \overline{C_k}$

$$X \cdot \overline{C_k} = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n C_n \cdot \overline{C_k} = Y_k C_k \cdot \overline{C_k} = N \cdot Y_k$$

Pokazi Demo Mathematica,
https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k
https://www.jezzamon.com/fourier/index.html

FFT: Fast Fourier transform (Gauss; Cooley - Turkey)

Ideja (kako se pospeši algoritme) demo @ $N=4$

$$Y_1 = X_0 \cdot e^{-i2\pi \frac{1\cdot 0}{4}} + X_1 \cdot e^{-i2\pi \frac{1\cdot 1}{4}} + X_2 \cdot e^{-i2\pi \frac{1\cdot 2}{4}} + X_3 \cdot e^{-i2\pi \frac{1\cdot 3}{4}}$$

$$Y_3 = X_0 \cdot e^{-i2\pi \frac{3\cdot 0}{4}} + X_1 \cdot e^{-i2\pi \frac{3\cdot 1}{4}} + X_2 \cdot e^{-i2\pi \frac{3\cdot 2}{4}} + X_3 \cdot e^{-i2\pi \frac{3\cdot 3}{4}}$$

$4 \cdot 3 +$ $\quad 4 \cdot 3 +$ } 14 operacij za izračun Y_1 & Y_3

bistvena izboljšava

$$S = X_0 \cdot e^{-i2\pi \cdot \frac{0}{4}} + X_2 \cdot e^{-i2\pi \cdot \frac{2}{4}} \qquad 1\uparrow\ 2\cdot$$

$$L = X_1 \cdot e^{-i2\pi \cdot \frac{1}{4}} + X_3 \cdot e^{-i2\pi \cdot \frac{3}{4}} \qquad 1\uparrow\ 2\cdot$$

$$Y_1 = S + L \qquad 2f$$

$$Y_3 = S - L$$

$4f$ $\quad 4\cdot$ } 8 operacij za izr. Y_1 & Y_3