Zaporedja

Teden 3 & 4

Def: Zaporedje je preslikava $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$n \mapsto a_n$ (n: index, a_n: členi)

zapis $(a_n)_n = (a_1, a_2, a_3, \dots)$

Podajanje zaporedij:

- **eksplicitno:** $a_n = f(n)$, kjer je $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ npr. $a_n = \frac{1}{n}$
- **rekurzivno:** (so še ostali: implicitno, opisno, s pogoji)

  enočlena rekurzija: podamo a_0 in $a_{n+1} = f(a_n)$

  npr. $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 5$

  dvočlena rekurzija: podamo a_0, a_1, $a_{n+2} = f(a_{n+1}, a_{n+2})$

Primeri:

- Št. bakterij se vsak dan podvoji. Začnemo s 100 bakterijami. Zapiši zap. št. bakterij v dnevu n.

  $a_{n+1} = 2 \cdot a_n \qquad a_0 = 100$

- $a_n = (-1)^n$

- Fibonaccijevo zaporedje: $n \in \mathbb{N}$

  a_n = # zaporedij enic in dvojic, katerih vsota = n

  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (a_{n-1}: dodamo 1 na koncu; a_{n-2}: dodamo 2 na koncu)

  $a_1 = 1, a_2 = 2$ (običajno pri Fib: $a_2 = 1$)

- Collatzeva domneva (1937): Ali tako zaporedje doseže 1 za

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{če je } a_n \text{ sodo} \\ 3a_n + 1, & \text{če je } a_n \text{ liho} \end{cases}$$

poljuben $a_1 \in \mathbb{N}$?

Preverjeno do 2^{71}.

- **Aritmetično zaporedje**

  $a_n = a_0 + n \cdot d$, $a_0, d \in \mathbb{R}$

  $a_{n+1} = a_n + d$

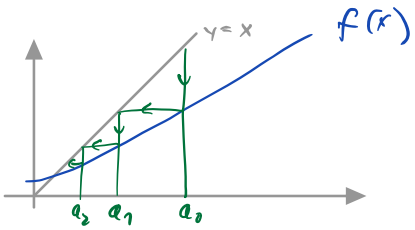
- **Geometrijsko zaporedje**

  $a_n = a_0 \cdot q^n \qquad q, a_0 \in \mathbb{R}$

  $a_{n+1} = q \cdot a_n$

- Grafični prikaz rekurzivnega zaporedja

  $a_{n+1} = f(a_n)$



Lastnosti zaporedij:

Zaporedje $(a_n)_n$ je

① Navzgor omejeno, če obstaja zgornja meja, t.j. $M \in \mathbb{R}$; $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

V tem primeru obstaja najmanjša zgornja meja:

supremum $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

② Navzdol omejeno, če obstaja spodnja meja, t.j. $m \in \mathbb{R}$: $m \leq a_n$, $\forall n$.

V tem primeru obstaja največja spodnja meja:

infimum $\inf_n a_n$.

③ Omejeno, če je navzgor in navzdol omejeno.

Primeri: $\frac{1}{n}$, $-n^2$

④ Naraščajoče, če $a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n$. (strogo naraščajoče, če $a_{n+1} > a_n$, $\forall n$).

⑤ Padajoče, če $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n$ (strogo padajoče, če $a_{n+1} < a_n$, $\forall n$).

⑥ Monotono, če je naraščajoče ali padajoče.

Primeri: Analiziraj omejenost in monotonost:

ⓐ $\frac{n^2-1}{n}$

$= n - \frac{1}{n}$

↓ omejeno

↗ neomejeno

↗ naraščajoče

ⓑ $c_n = \frac{c_{n-1}}{2}$ $c_0 = 1$ ali $c_0 = -8$

padajoče

omejeno

naraščajoče

omejeno

Limita

Uvod z računsko natančnostjo Uvod: če znamo količino poljubno aproksimirati, znamo dobiti tudi točen rezultat (določne ploščine, hitrosti...) vrste, odvodi, int. tablice (Vega), nevronske mreže kot univerzalni aproksimatorji. Kaj pomeni to da "poznamo" π?

Def: $a \in \mathbb{R}$ je limita zaporedja $(a_n)_n$ $[a = \lim_{n\to\infty} a_n]$, če

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad |a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

Zaporedje je konvergentno, če ima limito, divergentno sicer.

(če se za poljubno računsko natančnost ε, rezultat stabilizira).

Primeri: Razišči konvergenco, določi $N(\varepsilon)$.

ⓐ $\frac{1}{n^2}$ ⓑ $(-1)^n$ ⓒ $0.\underbrace{99\ldots9}_{n}$ ⓓ 2^n ⓔ $2^{\hat{}}n$

Zaporedje $(a_n)_n$:

① Narašča prek vsake meje $[\lim_{n\to\infty} a_n = \infty]$

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad a_n \geq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

($\forall M \in \mathbb{R}$: meja; $\exists N \in \mathbb{N}$: trenutek)

② Pada prek vsake meje $[\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty]$

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad a_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

to NI Konvergenca ali neomejenost

Trditev: Vsako konvergentno zaporedje je omejeno. (ni pa nujno monotono (§8)).

D.:

Def: $a \in \mathbb{R}$ je stekališče zaporedja $(a_n)_n$, če $\forall \varepsilon > 0$ neskončno mnogo členov leži v $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Primeri: $(-1)^n$

Trditev: Vsaka limita je stekališče. Vsako omejeno zaporedje ima stekališče.

Dokaz! za velja v $\mathbb{R}$!

Zaporedja (nadaljevanje)

Teden 4

Primeri (ne)-konvergenc:

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} \infty & a>0 \quad \text{div} \\ 1 & a=0 \quad \text{Konv} \\ 0 & a<0 \quad \text{Konv.} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0 & |a|<1 \\ / & a\le -1 \end{cases} \Big\} \text{Konv}$$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Pravila za računanje limit:

Naj bo $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$ → velja za deljenje, če $b, b_n \neq 0$, $\forall n$.

V smislu naraščanj preko vseh mej velja tudi: $\infty + a = \infty$, $\infty \cdot 5 = \infty$, $\infty + \infty = \infty$ in $\infty \cdot \infty = \infty$.

$\frac{1}{\infty} = 0$

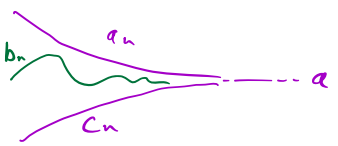
Problematične kombinacije: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞, ...

Primer: $a_n \neq 0, \forall n$. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \begin{cases} \infty & \text{recimo če } a_n > 0 \\ -\infty & \text{recimo če } a_n < 0 \\ \text{div} & \text{recimo, če } a_n \text{ alternira} \\ 1^\infty, \text{div} & \text{ostale kombinacije} \end{cases}$

Primeri: $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{3n^2+n+1}$

Izreki o konvergenci:

a) Če $\forall n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \le b_n \le c_n$ in $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, tedaj je $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.



Primeri: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(e^n + n!)}{n}$

b) Naraščajoče zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je navzgor omejeno (sicer narašča preko vseh mejа; lim = sup.)

→ D: Naj bo $a = \sup a_n$, $\varepsilon > 0$.

$\exists N \in \mathbb{N}: a_N > a - \varepsilon$.



Tedaj $a_n \in (a-\varepsilon, a)$, $\forall n > N$

↙ monotonost ↘ ker $\sup = a$

□

c) Padajoče zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je navzdol omejeno (sicer pada pod vsako mejo; lim = inf.)

Primeri: $a_1 = 0$, $a_n = \frac{a_{n-1}+6}{2}$

- $a_n \le 6$ (indukcija)
- a_n naraščajoče (uporabi $a_n \le 6$)
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 6$

Pomembna limita: 1^∞

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

- obresti
- $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ ... n-kat izgubiš igro, kjerje verj. zmage $\frac{1}{n}$. $\doteq \frac{1}{e} \doteq 0.36$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \frac{n}{n-1}\right)^{-1} = e^{-1}$$

($\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \to e$, $\frac{n}{n-1} \to 1$)

Definicija potence pozitiv. števila pri iracionalnem eksponentu:

$r, q \in \mathbb{N}, a > 0$

$s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- $a^r = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r}$
- $a^{\frac{1}{r}} > 0$ je število $b > 0$, za katerega $b^n = a$
- $a^{-r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r$
- $a^{\frac{r}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^r$
- $a^s = \lim\limits_{n \to \infty} a^{p_n}$, kjer velja $p_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = s$.

definiram enolično!

→ π ni enolično def.!

} zakaj obstaja?

Bachman - Landau notacija

(iz predmeta ALGORITMI IN PODATKOVNE STRUKTURE)

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

- $f(n) = O(g(n))$ (Big Oh), če je $\frac{f(n)}{g(n)}$ omejeno

  f je asimptotično omejena z g

- $f(n) = o(g(n))$, če je $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

  g asimptotično dominira f

Primeri hitrosti algoritmov:

- Poišči največji člen v seznamu: $O(n)$
- - - - - - - - urejenem seznamu: $O(1)$
- Poišči določeno številko v urejenem seznamu: $O(\log n) = O(\log_2 n)$ (telefonski imenik)
- Uredi seznam: $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$

  Merge sort $= O(n \cdot \log n)$
- Izračunaj $1 + 2 + \ldots + (n-1)$ $O(n)$

  uporabi $\frac{n(n-1)}{2}$ $O(1)$

P = problemi rešljivi v polinomskem času $\bigcup\limits_{q \in \mathbb{N}} O(n^q)$.

NP = problemi, za katere lahko rešitev verificiramo v polj. času.
(razcep n na praštevila)

Najpomembnejše odprto vprašanje v računalništvu:

Ali je P = NP?

Posledice za kriptografijo/varnost.