Vrste (neskončne vsote)





ostanek $= \frac{1}{2^n}$
vsota $= 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$

Kaj pa $\sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$?

$0{,}3+0{,}03+0{,}003+\ldots = \frac{1}{3}$

Def: Vrsta je simbolična vsota (realnih) števil

$$a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

→ m-ta delna vsota $s_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$

→ Vrsta **konvergira**, če konvergira zaporedje $(s_m)_m$

V tem primeru je vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} s_m$.

→ Vrsta **divergira**, če ne konvergira.

Trditev: Če $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira, je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (razloži le z besedami)

Obrat NE velja!!

Primeri: $\sum_{n=1}^{\infty} n$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonična vrsta divergira.

$= \frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16} > 8\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{2}$
$\vdots$
$\geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ divergira

Dk: vrsta konv.
$\Rightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0\ \exists N: |s_n - \lim_{n\to\infty} s_n| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \geq N$
$\Rightarrow |\underbrace{s_{n+1}}_{a_{n+1}} - s_n| < \varepsilon,\ \forall n \geq N$
$\Rightarrow |a_{n+1}| < \varepsilon,\ \forall n \geq N$ ☐

Geometrijska vrsta: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + \ldots$

delna vsota: $s_m = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^m$

$q \cdot s_m = \quad q^2 + q^3 + \ldots + q^m + q^{m+1}$ } −

$s_m(1-q) = q - q^{m+1}$

$$\rightarrow s_m = \frac{q(1-q^m)}{1-q} = \frac{q}{1-q}\left(1-q^m\right)$$

$|q|<1$ ↓ $\lim_{m\to\infty} s_m = \frac{q}{1-q}$

$\frac{q}{1-q}$ ni def za $q=1$ (za $q=1$ vrsta divergira)

$(1-q^m)$ → konv. (proti 0) $\Leftrightarrow |q|<1$

Sklep: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{q}{1-q} & \text{za } |q|<1 \\ \text{divergira} & \text{sicer.} \end{cases}$

Primeri: • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n}$

• $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

Def: Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolutno konvergira**, če konvergira $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Trditev: Vsaka absolutno konvergentna vrsta konvergira.

Primer: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ absolutno konvergira, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ pa ne.

Pravila za računanje vrst:

Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni vrsti, $c \in \mathbb{R}$.

Tedaj so konvergentne tudi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

obrat ne velja

D.: S_m^a delne vsote $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

S_m^b delne vsote $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$S_m^{a+b} = S_m^a + S_m^b \xrightarrow{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Primeri: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

(Posebej divergirata, skupaj ne)

(Vrstni red seštevanja je pomemben) → s permutacijo členov v $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ lahko dobim poljubno vsoto.

Dominiranje vrst:

Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsti z nenegativnimi členi.

Naj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **dominira** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$: $a_n \geq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tedaj velja:

- če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira.
- če $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Primeri: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)+1}{2^n}$

Konvergenčni kriteriji: Primerjamo vrsto z geom. vrsto. ← motivacija: neskončni polinomi, Taylor, Fourier

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta, $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

① **Kvocientni kriterij:** Naj bo $D_n = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ zaporedje |kvocientov|

Naj obstaja $\lim_{n\to\infty} D_n = D < \infty$. Tedaj:

- če $D > 1$, vrsta divergira
- (*) če $D < 1$ vrsta absolutno konvergira
- (če $D = 1$ ne vemo)

geom. vrsta: $D_n = q$

Def: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ potenčna vrsta

Primer: Za katere $x > 0$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ konvergira? ← neskončen polinom

$$D_n = \frac{(n+1)x^{n+1}}{n\,x^n} = \frac{n+1}{n} \cdot x \xrightarrow{n\to\infty} x$$

Konvergira za $|x| < 1$

Divergira za $|x| > 1$ ∪ $|x| = 1$ ← posebna obravnava

Idija D_i: Recimo $D_n \leq 0{,}9$, $\forall n$.

Tedaj

$a_2 \leq 0{,}9\, a_1$

$a_3 \leq (0{,}9)^2 a_1$

$a_4 \leq (0{,}9)^3 a_1$

$\vdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (0{,}9)^{n-1} \cdot a_1}_{\text{konv., saj je geom.}}$$

□

Primer: Konvergenca $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ za vsa $x \in \mathbb{R}$. ← ugasni funkcija

② **Korenski kriterij:** Naj bo $C_n = \sqrt[n]{|a_n|}$

Naj obstaja $\lim_{n\to\infty} C_n = C < \infty$. Tedaj.

- če $C > 1$, vrsta divergira
- (*) če $C < 1$ vrsta absolutno konvergira.
- (če $C = 1$ ne vemo)

geom. vrsta: $C_n = q$

Idija D_i: Recimo $C_n \leq 0{,}9$, $\forall n$.

Tedaj $a_n \leq (0{,}9)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (0{,}9)^n}_{\text{konv., saj je geom.}}$$

□

Primer: Za katere $x > 0$ konvergira $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$?

$C_n = \frac{x}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\forall n$. Konvergira za vsak x.

③ **Leibnitzov kriterij:** Naj bo $(a_n)_n$ padajoče proti 0.

Tedaj $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergira.

Primer: Alternirajoča harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ konvergira.

Izrek: Na območjih (*) je vsota potenčne vrste

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{b_n \cdot x^n}_{a_n}$ zvezna funkcija.

Velja še $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x^n)'$

$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \int x^n dx$ člensko $\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$