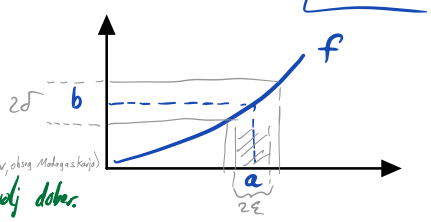
Funkcije (nadaljevanje)

Teden 6



Limite funkcij:

f funkcija, $a, b \in \mathbb{R}$

(modeliranje, analiza podatkov, obisk Madagaskarja)

„$f(a)$ lahko izračunamo poljubno natančno, če je približek a dovolj dober."

Limita: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} : f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

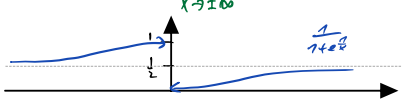
Leva limita: $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \underbrace{\forall x \in (a-\delta, a)}_{\text{levo od } a} : f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

Desna limita: $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \underbrace{\forall x \in (a, a+\delta)}_{\text{desno od } a} : f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

Trditev: Limita v točki a obstaja natanko tedaj, ko v a obstajata ujemajoči se leva in desna limita.

Primer:

- $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ $\quad \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 1 \quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} = \frac{1}{2}$
- $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$



Limite v neskončnosti (kot pri zaporedjih)

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{R} : \forall x > N : f(x) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{R} : \forall x < N : f(x) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

Primer: $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ (za standardno vrjo)

Naraščanje preko vseh mej

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \; \exists \delta > 0 : x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} : f(x) > M$

$\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \infty \quad \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \infty \quad \ldots$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \; \exists N \in \mathbb{R} : \forall x > N : f(x) > M$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty \quad \ldots$

Padanje pod vsako mejo

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0: \quad x \in (a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}: \quad f(x) < M$

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\searrow a} f(x) = -\infty \qquad \dots$

$\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{R}: \quad \forall x > N: \qquad f(x) < M$

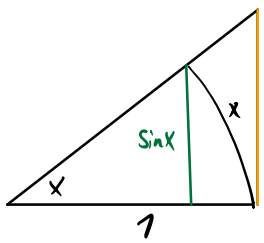
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \dots$

Lastnosti limit funkcij:

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Tedaj je $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta \iff \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \beta$ $\forall$ zaporedje $(a_n)_n$: $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $a_n \neq \alpha, \forall n$
- Pravila za računanje limit so ista kot pri zaporedjih.

Primeri:

- $\lim_{x\to \{0, \frac{2}{\pi}, \pm\infty\}} \sin\frac{1}{x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



Dokaz: $\tan x > 0$:

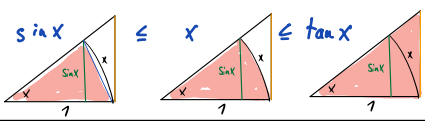
$0 < \sin x < x < \tan x \qquad (*)$

$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x} \quad / \cdot \sin x > 0$

$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$x\to 0$, $x\to 0$, $\frac{\sin x}{x}$, 1

(*) Ploščine:



Zveznost

Def: Funkcija f je zvezna v $a \in D_f$, če $f(a) = \lim_{\substack{x\to a \\ x\in D_f}} f(x)$.

če lahko delamo dobre približke $f(a)$.

Primeri:

- $\frac{x}{|x|}$. Ni zvezne surj. $\mathbb{R} \to \{0, 1, \dots, 10\}$ (ocene).
- $f(x) = \begin{cases} ax+1 & x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$ Določi parameter a tako, da bo f zvezna.

Lastnosti zveznosti:

① Vse elementarne funkcije so zvezne (na def območjih) (poli niso problematični, če niso v D_f)

② Če sta f in g zvezni v a:

i) je graf f v a nepretrgana krivulja

ii) so zvezne $f+g$, $f \cdot g$, $5 \cdot f, \ldots$ $\lim_{x \to 1} \sin(x^2-1)$

iii) lahko zamenjamo vrstni red računanja limite v a in vrednosti funkcije.

③ Če je f zvezna v a, g pa v $f(a)$, je $g \circ f$ zvezna v a.

④ Če je f zvezna na intervalu $[a,b]$, potem:

i) je f omejena in doseže svoj infimum ter supremum. → ni polov!

$\inf f = \inf \{ f(x);\ x \in D_f \}$ → $\sup = \max$, $\inf = \min$

ii) $\forall y \in [\inf f, \sup f]\ \exists x \in D_f : f(x) = y$ → slika f je zaprt interval!

⑤ Če $\lim_{x \to b} f(x)$ obstaja, a $b \notin D_f$, lahko f zvezno razširimo na b z $f(b) := \lim_{x \to b} f(x)$ Primer: $f(x) = \frac{x}{x}$

Izrek: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna, $f(a) \cdot f(b) \leq 0 \Rightarrow f$ ima ničlo na $[a,b]$.

Dokaz: BŠS $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

$A := \sup \{ x \in [a,b],\ f(a) < 0 \} \in [a,b]$ (omejena)

$f(A) = \lim_{\substack{x \to A \\ f(x) < 0}} f(x) \leq 0$

torej $A \neq b$

Ampak potem $A \in (a,b)$, $f(A) = \lim_{\substack{y \searrow A \\ f(y) > 0}} f(y) \leq 0$

$\Rightarrow f(A) = 0$ ∎

Ničle zveznih funkcij

Obstaja polinom 5. stopnje, ki ni rešljiv z radikali, torej eksaktno reševanje ne deluje vedno -> rešitev kot zaporedje, ki konvergira k ničli

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcija

NALOGA: poiščimo ničlo f (ponavadi vemo, da obstaja)

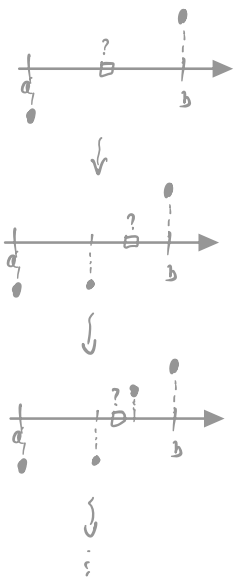
METODA: zvito ugibanje (konstruirajmo zaporedje, ki konvergira k ničli)

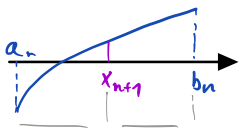
Bisekcija: ① Naj velja $f(a)\cdot f(b)<0$

② Začetna približka ničle: $a_1=a$, $b_1=b$

③ Induktivno računamo naslednje približke a_n, b_n:

$$x_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$$ ← povprečje med približki (bisekcija)





④ 3 možnosti:

↳ $f(x_{n+1})=0 \Rightarrow$ našli smo ničlo

↳ $f(x_{n+1})\cdot f(a_n)<0 \Rightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}]=[a_n, x_{n+1}]$

↳ $f(x_{n+1})\cdot f(a_n)>0 \Rightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}]=[x_{n+1}, b_n]$

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =$ ničla f

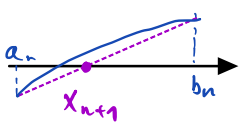
$\{a_{n+1}, b_{n+1}\}$ ↙↙ boljša približka ničla je na $[a_{n+1}, b_{n+1}]$

Regula falsi: • upošteva vrednosti v a in b, ne le predznak

① in ② kot pri bisekciji

③
$$x_{n+1}=\frac{a_n\cdot f(b_n)-b_n\cdot f(a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}$$

Izpeljava:



$$\frac{x_{n+1}-a_n}{f(a_n)}=-\frac{b_n-x_{n+1}}{f(b_n)}$$

$$x_{n+1}\cdot f(b_n)-a_n\cdot f(b_n)=-b_n\cdot f(a_n)+x_{n+1}f(a_n)$$

$$x_{n+1}\left(f(b_n)-f(a_n)\right)=a_n\cdot f(b_n)-b_n\cdot f(a_n)$$

$$x_{n+1}=\frac{a_n\cdot f(b_n)-b_n\cdot f(a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}$$ ↙ lahko delimo?

④ In zaključek kot pri bisekciji:

• Običajno konvergira hitreje kot bisekcija.

Sekantna metoda: ① Izberemo začetna približka ničle: x_1, x_2

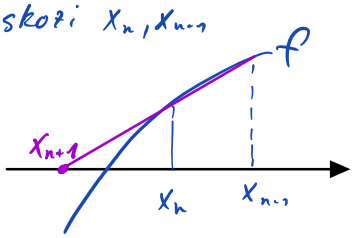
② Induktivno računamo naslednje približke

x_{n+1} .... ničla linearne funkcije skozi x_n, x_{n-1}

formula regula falsi →

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} \cdot f(x_n) - x_n \cdot f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Ne zanimajo nas predznaki.



- Lep poskus, ne konvergira vedno.