Zaporedja in limite

Zaporedje je urejen seznam števil. Najprej spoznamo načine podajanja, nato naraščanje, padanje in omejenost. S podzaporedji pojasnimo stekališča, s pojmom limite pa natančno izrazimo, kaj pomeni približevanje eni vrednosti. Najprej ponovimo preproste množice v kompleksni ravnini, nato rešimo zahtevnejše geometrijske zglede. Za tem preidemo na zaporedja, stekališča in limite ter zaključimo z izrekom o konvergenci monotonih omejenih zaporedij.

Učni cilji

- zapisati zaporedje eksplicitno in rekurzivno ter utemeljiti enakovrednost zapisov;
- dokazati monotonost in omejenost, tudi za podzaporedja;
- razlikovati med stekališčem in limito ter določiti indeks za dano natančnost;
- utemeljiti konvergenco monotonih omejenih zaporedij;
- prevesti pogoje za kompleksna števila v enačbe in neenačbe v ravnini.

1 Uvodni zgledi množic v kompleksni ravnini

Pišemo $z = x + y\mathrm{i}$, kjer sta $x = \mathrm{Re}(z)$ in $y = \mathrm{Im}(z)$ realni števili. Velja

$$|z - c| = \text{razdalja od točke } z \text{ do točke } c.$$

Pri več pogojih hkrati iščemo *presek* ustreznih množic. Rob je vključen pri $\leq$ in izključen pri $<$.

1.1 Primerjava razdalj in polkrog

Opišimo

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq |z + 1|,\ |z| \leq 2\}.$$

Prvi pogoj pomeni, da smo bližje točki 1 kakor točki -1, ali pa od obeh enako oddaljeni. Ker sta absolutni vrednosti nenegativni, smemo neenakost kvadrirati v obe smeri:

$$\begin{aligned} |z - 1| \leq |z + 1| &\iff (x-1)^2 + y^2 \leq (x+1)^2 + y^2 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 \leq x^2 + 2x + 1 \\ &\iff -4x \leq 0 \iff x \geq 0. \end{aligned}$$

Drugi pogoj je $x^2 + y^2 \leq 4$. Zato

$$\boxed{A = \{x + y\mathrm{i} : x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}.}$$

Dobimo desni zaprti polkrog s polmerom 2, skupaj z navpičnim premerom. Točka 1 je v množici, točka -1 ni, točka $2\mathrm{i}$ pa leži na njenem robu.

1.2 Presek dveh krogov

Za množico

$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 2,\ |z + 1| \leq 2\}$$

dobimo pogoja

$$(x-1)^2+y^2\le 4, \qquad (x+1)^2+y^2\le 4.$$

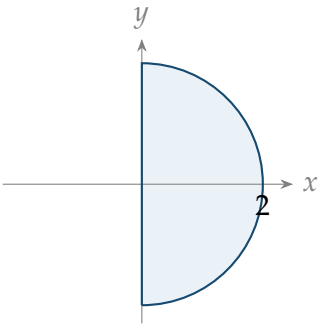
To sta zaprta kroga s središčema 1 in -1 ter polmeroma 2. Za presečišči robnih krožnic odštejemo enačbi:

$$(x-1)^2-(x+1)^2=0 \iff -4x=0 \iff x=0.$$

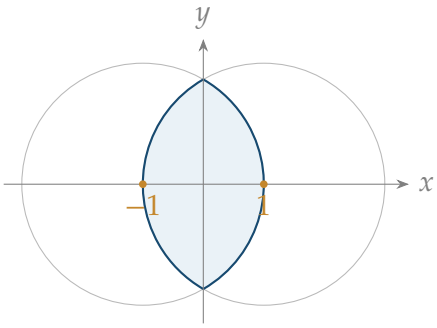
Vstavimo v eno od enačb: $1+y^2=4$, torej $y=\pm\sqrt{3}$. Za vsak fiksen x morata veljati oba pogoja; strožji je tisti z večjim kvadratom. Ker je $\max\{(x-1)^2,(x+1)^2\}=(|x|+1)^2$, dobimo še

$$\boxed{-1\le x\le 1, \qquad |y|\le\sqrt{4-(|x|+1)^2}.}$$

Množica ima obliko leče in vsebuje celoten rob.



desni polkrog



presek krogov

2 Zahtevnejše množice v kompleksni ravnini

Te zglede obravnavamo po uvodnih primerih s krogi in polravninami. Ključna je izbira zapisa: za razdalje in realne dele je pogosto primeren kartezični zapis, pri potencah in kotih pa polarni.

2.1 Zahtevnejši zgled: elipsa $|z-1|+|z+1|=4$

Iščemo

$$E=\{z\in\mathbb{C}:|z-1|+|z+1|=4\}.$$

Vsota razdalj do dveh fiksnih točk 1 in -1 je stalna. To je geometrijski opis elipse. Izpeljimo še njeno enačbo. Za $z=x+y\mathrm{i}$ označimo

$$u=\sqrt{(x-1)^2+y^2}, \qquad v=\sqrt{(x+1)^2+y^2}.$$

Pogoj je $u+v=4$, hkrati pa

$$u^2-v^2=(x-1)^2-(x+1)^2=-4x.$$

Ker $(u-v)(u+v)=-4x$ in je $u+v=4$, dobimo $u-v=-x$. Seštejemo in odštejemo enačbi:

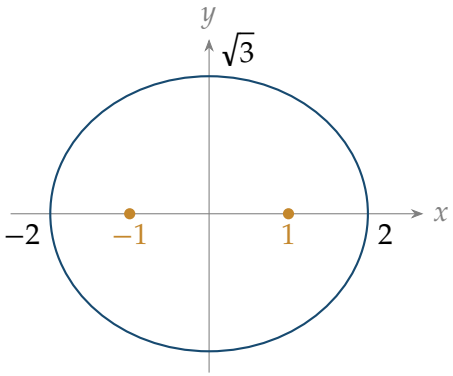
$$u=2-\frac{x}{2}, \qquad v=2+\frac{x}{2}.$$

Zdaj kvadriramo prvo enačbo:

$$(x-1)^2 + y^2 = \left(2 - \frac{x}{2}\right)^2,$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4 - 2x + \frac{x^2}{4},$$
$$\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 3,$$
$$\boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.}$$

Preverimo obrat, da s kvadriranjem nismo dodali rešitev. Iz zadnje enačbe sledi $|x| \le 2$. Izraza $2 - x/2$ in $2 + x/2$ sta zato pozitivna. Enačba zagotavlja $u^2 = (2 - x/2)^2$ in $v^2 = (2 + x/2)^2$, zato po korenjenju $u = 2 - x/2$, $v = 2 + x/2$ ter $u + v = 4$. Oba opisa sta res enakovredna.

Središče je izhodišče, polosi sta $a = 2$ in $b = \sqrt{3}$. Gorišči sta ± 1, saj je $a^2 - b^2 = 4 - 3 = 1$. Na oseh dobimo presečišča ± 2 in $\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$. Gre samo za krivuljo, ne za njeno notranjost.



2.2 Zahtevnejši zgled: $\mathrm{Re}(z^2) \ge 1$

Za $z = x + y\mathrm{i}$ je

$$z^2 = (x + y\mathrm{i})^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i},$$

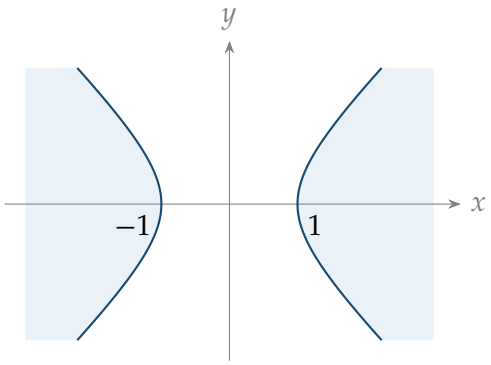
zato je pogoj enakovreden $x^2 - y^2 \ge 1$. Od tod dobimo

$$x^2 \ge 1 + y^2 \iff |x| \ge \sqrt{1 + y^2},$$

kar pomeni

$$\boxed{x \ge \sqrt{1 + y^2} \quad \text{ali} \quad x \le -\sqrt{1 + y^2}.}$$

Rob je hiperbola $x^2 - y^2 = 1$ z vrhovoma $(1, 0)$ in $(-1, 0)$. Vključeni sta območji desno od desne veje in levo od leve veje, skupaj z robom. Izhodišče ni vključeno; točki 2 in -2 sta. Za orientacijo: iz $x^2 - y^2 = 1$ sledi $x^2 = y^2 + 1$, zato se pri velikem $|y|$ razmerje $|x|/|y|$ približuje 1; veji se približujeta premicama $y = x$ in $y = -x$.



Pozor: realni del kvadrata

$\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$, medtem ko je $(\mathrm{Re}(z))^2 = x^2$. Operaciji kvadriranja in jemanja realnega dela nista zamenljivi. Prav tako $|z|^2 = x^2 + y^2$ ni isto kot z^2.

2.3 Zahtevnejši zgled: $\mathrm{Re}(z^3) = 0$

V kartezičnem zapisu je

$$\begin{aligned} z^3 &= (x + y\mathrm{i})^3 = x^3 + 3x^2y\mathrm{i} + 3xy^2\mathrm{i}^2 + y^3\mathrm{i}^3 \\ &= (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Zato

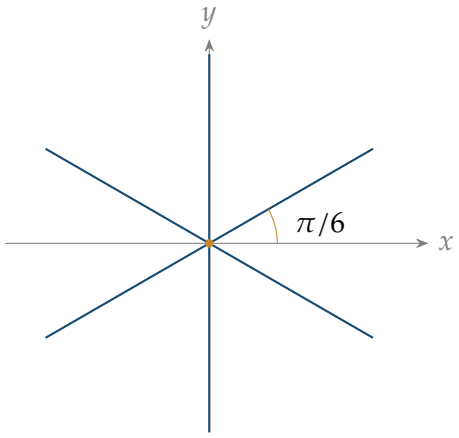
$$\mathrm{Re}(z^3) = 0 \iff x(x^2 - 3y^2) = 0 \iff x = 0 \text{ ali } y = \frac{x}{\sqrt{3}} \text{ ali } y = -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Dobimo tri premice skozi izhodišče.

Preverimo še polarno. Za $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ je $\mathrm{Re}(z^3) = r^3\cos(3\varphi)$. Pri $r = 0$ je pogoj izpolnjen. Če je $r > 0$, smemo deliti z r^3 in dobimo

$$\begin{aligned} \cos(3\varphi) = 0 &\iff 3\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\iff \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

V enem obratu so smeri $30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°$. To je šest poltrakov, ki v nasprotnih parih sestavljajo tri premice.



2.4 Zahtevnejši zgled: lemniskata $|z^2 - 1| = 1$

Pogoj ni enak enačbi $|z - 1| = 1$. Razlika je v kvadriranju z. Najprej opazimo faktorizacijo

$$|z^2 - 1| = |(z - 1)(z + 1)| = |z - 1|\,|z + 1|.$$

Množica je torej opisana s *produktom* razdalj do 1 in -1, ne z vsoto razdalj kot pri elipsi.

V kartezičnem zapisu iz $z^2 - 1 = (x^2 - y^2 - 1) + 2xy\mathrm{i}$ dobimo

$$\begin{aligned} |z^2 - 1| = 1 &\iff (x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 = 1 \\ &\iff (x^2 - y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) + 1 + 4x^2y^2 = 1 \\ &\iff x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 2(x^2 - y^2) \\ &\iff \boxed{(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2).} \end{aligned}$$

Kvadriranje je enakovredno, ker je absolutna vrednost nenegativna. Enačba je soda v x in v y, zato je krivulja simetrična glede na obe osi.

Vstavimo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ in uporabimo $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos(2\varphi)$:

$$r^4 = 2r^2\cos(2\varphi).$$

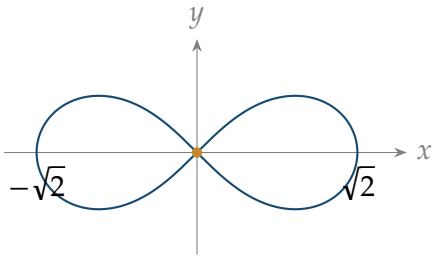
Primer $r = 0$**.** Izhodišče zadošča prvotnemu pogoju, ker je $|-1| = 1$. **Primer** $r > 0$**.** Delimo z r^2 in dobimo

$$\boxed{r^2 = 2\cos(2\varphi), \qquad \cos(2\varphi) > 0.}$$

Za zaprt opis obeh zank lahko vključimo tudi krajišča z $r = 0$ in zapišemo

$$r = \sqrt{2\cos(2\varphi)}, \qquad \varphi \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4].$$

Na realni osi je $y = 0$, zato $x^4 = 2x^2$ in $x \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$. Na imaginarni osi je $x = 0$, zato $y^4 = -2y^2$, kar je mogoče le pri $y = 0$. Desna zanka leži v smereh med $-45°$ in $45°$, leva med $135°$ in $225°$. V izhodišču se zanki stikata. Maksimalni polmer je $\sqrt{2}$, dosežen v smereh 0 in π.



Pozor: deljenje lahko izgubi rešitev

Če bi takoj delili z r^2, bi brez preverjanja zavrgli izhodišče. Zato pred deljenjem z izrazom, ki je lahko nič, vedno posebej obravnavamo njegove ničle. Pri kvadriranju pa preverimo predznake in obratno implikacijo.

3 Zaporedje in načini podajanja

Definicija: realno zaporedje

Realno zaporedje je preslikava $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ ali $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Tu je $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ in $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Vrednost $a(n)$ označimo z a_n in jo imenujemo n-ti člen. Začetni indeks navedemo ob vsakem zgledu.

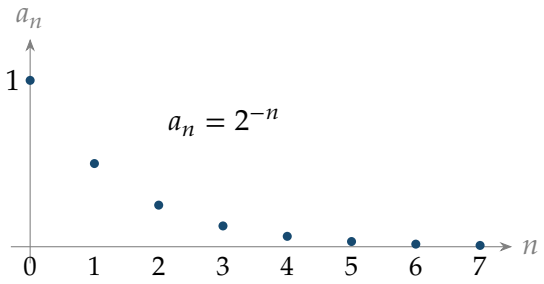
Zaporedje ni samo množica vrednosti: pri $1, -1, 1, -1, \ldots$ poznamo tudi vrstni red in ponovitve. Prvih nekaj členov samo po sebi ne določa nadaljevanja; potrebujemo pravilo.

3.1 Eksplicitni zapis in geometrijski prikaz

Pri eksplicitnem zapisu je $a_n = f(n)$. Za $a_n = 2^{-n}$, $n \geq 0$, dobimo

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{8}, \ldots$$

Na številski premici označimo vrednosti. V ravnini pa rišemo točke (n, a_n): abscisa pove indeks, ordinata vrednost. Med dvema zaporednima celima indeksoma ni novih členov zaporedja.



3.2 Rekurzivni zapis in začetni pogoji

Rekurzija pove, kako naslednji člen izračunamo iz prejšnjih. Na primer

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \quad (n \geq 0).$$

Indukcija potrdi $a_n = 2^{-n}$: formula velja pri $n = 0$; če velja pri n, je $a_{n+1} = \frac{1}{2} 2^{-n} = 2^{-(n+1)}$. Brez začetnega pogoja bi ista rekurzija opisovala tudi $3, 3/2, 3/4, \ldots$ in mnogo drugih zaporedij.

3.3 Aritmetična zaporedja: stalna razlika

Definicija: aritmetično zaporedje

Za stalni $d \in \mathbb{R}$ velja $a_{n+1} = a_n + d$. Če je $a_0 = a$, je

$$a_n = a + nd \quad (n \geq 0).$$

Iz zaporednega vstavljanja dobimo $a_1 = a + d$, $a_2 = a + 2d$, $a_3 = a + 3d$. Indukcijski korak je $(a + nd) + d = a + (n + 1)d$. Zato formula velja za vsak n.

Začetni členi	a_0 in d	Splošni člen
$1, 2, 3, 4, \ldots$	$a_0 = 1, d = 1$	$1 + n$
$2, 5, 8, 11, \ldots$	$a_0 = 2, d = 3$	$2 + 3n$
$1, 1 + \sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3}, \ldots$	$a_0 = 1, d = \sqrt{3}$	$1 + n\sqrt{3}$

Če indeksiranje začnemo z $a_1 = a$, je formula $a_n = a + (n-1)d$. Pri $d > 0$ zaporedje strogo narašča, pri $d < 0$ strogo pada, pri $d = 0$ je konstantno, saj je $a_{n+1} - a_n = d$.

3.4 Geometrijska zaporedja in Fibonacci

Pri geometrijskem zaporedju je $a_{n+1} = qa_n$ in $a_0 = a$. Za $q \neq 0$ velja $a_n = aq^n$; dokaz je znova indukcija. Pri $q = 0$ je začetni člen a, vsi naslednji pa so 0, zato ni treba uporabljati zapisa 0^0. Razmerje $a_{n+1}/a_n = q$ uporabljamo samo, kadar je $a_n \neq 0$. Trije zgledi z začetnim indeksom 0 so

Začetni členi	Količnik	Splošni člen
$1, 2, 4, 8, \ldots$	$q = 2$	2^n
$1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$	$q = 1/2$	2^{-n}
$1, \sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots$	$q = \sqrt{3}$	$(\sqrt{3})^n$

Za pozitiven začetni člen in $0 < q < 1$ zaporedje strogo pada, za $q > 1$ strogo narašča; negativen q povzroča izmenjavanje predznakov.

Fibonaccijevo zaporedje tu indeksiramo z začetnima vrednostma

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 0).$$

Dobimo $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$. Dva predhodna člena zahtevata dva začetna pogoja. To ni aritmetično zaporedje (razlike niso stalne) in ni geometrijsko (na primer $F_2/F_1 = 2$, a $F_3/F_2 = 3/2$). Pogost je tudi dogovor $G_0 = 0$, $G_1 = 1$, $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$; tedaj je $F_n = G_{n+1}$. Gre za premik indeksiranja, ne za drugačno pravilo.

3.5 Izpeljava rekurzije iz eksplicitne formule

Naj bo

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}, \qquad n \geq 0.$$

Prvi členi so $-1, 0, 1/3, 1/2, 3/5, \ldots$. Posebej pazimo: $a_3 = 2/4 = 1/2$. Iz enačbe za a_n izrazimo indeks:

$$\begin{aligned} a_n(n+1) &= n - 1, \\ a_n n + a_n &= n - 1, \\ (1 - a_n)n &= 1 + a_n, \\ n &= \frac{1 + a_n}{1 - a_n}. \end{aligned}$$

Deljenje je dovoljeno, ker $a_n = 1 - 2/(n+1) < 1$ za vsak $n \geq 0$. V izrazu za naslednji člen zato dobimo

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{n}{n+2} \\ &= \frac{\dfrac{1+a_n}{1-a_n}}{\dfrac{1+a_n}{1-a_n}+2} = \frac{1+a_n}{1+a_n+2(1-a_n)} = \boxed{\frac{1+a_n}{3-a_n}}. \end{aligned}$$

Torej je enakovredni rekurzivni zapis

$$\boxed{a_0 = -1, \qquad a_{n+1} = \frac{1+a_n}{3-a_n} \quad (n \geq 0).}$$

Enakovrednost preverimo tudi v obratni smeri. Za $a_n = (n-1)/(n+1)$ je

$$1 + a_n = \frac{2n}{n+1}, \qquad 3 - a_n = \frac{2(n+2)}{n+1} > 0,$$

zato rekurzija da $a_{n+1} = n/(n+2)$, kot zahtevamo. Ker je začetni člen enak in rekurzija vsak naslednji člen določi enolično, indukcija potrdi enakost obeh zaporedij.

4 Monotonost: od opažanja do dokaza

Definicija: naraščanje in padanje

Za vsak dovoljeni indeks n zahtevamo:

naraščajoče	$a_{n+1} \geq a_n$;
strogo naraščajoče	$a_{n+1} > a_n$;
padajoče	$a_{n+1} \leq a_n$;
strogo padajoče	$a_{n+1} < a_n$.

Zaporedje je monotono, če je naraščajoče ali padajoče.

Konstantno zaporedje je v nestrogem smislu hkrati naraščajoče in padajoče. Zaporedje $1, 2, 2, 3, 4, 5, \ldots$, pri katerem se po drugem členu število 2 ponovi in nato nadaljujemo z naravnimi števili, je naraščajoče, ni pa strogo naraščajoče. Zaporedje $1, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ je padajoče, ni pa strogo padajoče: v obeh primerih strogo lastnost izključi že ena enakost sosednjih členov. Če lastnost velja šele od nekega indeksa naprej, to izrecno navedemo. Najzanesljiveje izračunamo razliko $a_{n+1} - a_n$ in določimo njen predznak.

4.1 Najpreprostejši zgledi

Za $n \geq 1$ velja

$$\begin{aligned} a_n = n: &\qquad a_{n+1} - a_n = (n+1) - n = 1 > 0; \\ b_n = \frac{1}{n}: &\qquad b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0; \\ c_n = -\frac{1}{n}: &\qquad c_{n+1} - c_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0. \end{aligned}$$

Negativni členi lahko naraščajo: $-1 < -1/2 < -1/3 < \cdots$.

Zgled: dodajanje konstante in linearnega dela

Za $u_n = 1 - 1/n$ dobimo

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

Za $v_n = n + 1/n$ dobimo

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \frac{1}{n(n+1)} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Obe zaporedji strogo naraščata. Pri $w_n = 1 + 1/n$ je razlika $-1/[n(n+1)] < 0$, pri $t_n = 1/n - n$ pa $-1 - 1/[n(n+1)] < 0$; obe zaporedji strogo padata. Zaporedje $1 - n$ ima stalno razliko -1.

Za $a_n = (n-1)/(n+1)$, $n \geq 0$, neposredno dobimo

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n(n+1) - (n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + n - (n^2 + n - 2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0. \end{aligned}$$

To je dokaz za vse indekse, ne samo opazovanje prvih členov.

4.2 Kako dokažemo, da zaporedje ni monotono?

Za $a_n = (-1)^n$, $n \geq 1$, je $a_2 - a_1 = 2 > 0$, medtem ko je $a_3 - a_2 = -2 < 0$. Prva razlika izključi padanje, druga naraščanje. Tudi pri $b_n = (-1)^n/n$ se smer menja:

$$b_1 = -1, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = -\frac{1}{3}.$$

Manjšanje absolutnih vrednosti ni isto kot padanje zaporedja.

5 Omejenost in izbira meja

Definicija: spodnja in zgornja meja

Zaporedje je navzdol omejeno, če obstaja $m \in \mathbb{R}$, da $m \leq a_n$ za vse indekse. Navzgor je omejeno, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, da $a_n \leq M$ za vse indekse. Omejeno je, če obstajata obe meji:

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \quad \forall n : \qquad m \leq a_n \leq M.$$

Zadošča katerakoli veljavna meja, ne nujno najtesnejša. Meja ni nujno člen zaporedja. Iz $m \leq a_n \leq M$ dobimo tudi $m - 1 < a_n < M + 1$, zato obstoj strogih meja opisuje isto lastnost.

5.1 Preprosti dokazi omejenosti

Za $n \geq 1$ je $0 < 1/n \leq 1$, zato

$$0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1, \qquad 1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2.$$

Zaporedje $(n-1)/(n+1) = 1 - 2/(n+1)$, $n \geq 0$, zadošča

$$-1 \leq a_n < 1.$$

Spodnja meja -1 je dosežena pri $n = 0$, zgornja 1 ni dosežena. Za vsak fiksen realen β je $-1 \leq \sin(\beta n) \leq 1$. Zaporedje je torej omejeno ne glede na izbiro parametra β.

Zaporedje ($n \geq 1$)	Spodnja meja	Zgornja meja
$1 - 1/n$	0	1
$1 + 1/n$	1	2
$\sin n$	-1	1
$(-1)^n$	-1	1

Pri zadnjih dveh zgledih omejenost ne pomeni naraščanja ali padanja. Za $\sin n$ (koti so v radianih) je na primer $\sin 1 \approx 0{,}8415 < \sin 2 \approx 0{,}9093$, a $\sin 3 \approx 0{,}1411 < \sin 2$. Opaženi nasprotni smeri že izključita monotonost. Za omejenost pa uporabimo točno neenakost $|\sin n| \leq 1$.

Vsako padajoče zaporedje je navzgor omejeno s prvim členom. Pri indeksiranju od 1 je $a_n \leq a_1$ za vsak n, saj se vrednosti ne povečujejo. Podobno je vsako naraščajoče zaporedje navzdol omejeno z a_1, ker $a_n \geq a_1$. Začetni indeks 0 samo zamenja a_1 z a_0. To zagotavlja le eno stran omejenosti: $1 - n$ pada, pa ni navzdol omejeno; $1 + n$ narašča, pa ni navzgor omejeno.

5.2 Dokaz neomejenosti in kršitelj predlagane meje

Za $a_n = 1 + n$, $n \geq 1$, velja $a_n \geq 2$, vendar zgornje meje ni. Naj bo M poljubna predlagana zgornja meja. Po arhimedski lastnosti obstaja naravno število $n > M - 1$; tedaj je $a_n = 1 + n > M$. Kvantifikatorja sta pomembna:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : \; a_n > M.$$

Za $b_n = 1 - n$ podobno ni spodnje meje: za poljuben m izberemo $n > 1 - m$, pa je $b_n < m$. Hkrati je $b_n \leq 0$.

Za zaporedje $c_n = 1/n$ preverimo predlagano spodnjo mejo $m = 1/10$. Prvih deset členov je ne krši, toda $c_{11} = 1/11 < 1/10$. Splošno za vsak $m > 0$ izberemo $n > 1/m$, pa $1/n < m$. Torej je 0 spodnja meja, nobeno pozitivno število pa ni spodnja meja.

Pozor: lastnost velja za vse člene

Končen prikaz ne more sam dokazati omejenosti. Za ovržbo ene predlagane meje pa zadošča že en sam kršeči člen.

6 Podzaporedja: omejenost in monotonost

Definicija: podzaporedje

Izberemo strogo naraščajoče naravne indekse $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Zaporedje $b_k = a_{n_k}$ je podzaporedje zaporedja (a_n). Indeksov ne preurejamo in jih izberemo neskončno mnogo.

Najpogosteje vzamemo sode indekse $n_k = 2k$ ali lihe $n_k = 2k - 1$. Ker $n_k \geq k$, indeksi n_k rastejo čez vsako končno mejo.

6.1 Katere lastnosti se ohranijo?

Če $m \leq a_n \leq M$ za vsak n, lahko posebej vstavimo $n = n_k$ in dobimo $m \leq b_k \leq M$. Vsako podzaporedje omejenega zaporedja je torej omejeno z istima mejama. Če je (a_n) naraščajoče, iz $n_{k+1} > n_k$ sledi

$$a_{n_k} \leq a_{n_k+1} \leq \cdots \leq a_{n_{k+1}},$$

torej $b_k \leq b_{k+1}$. Pri strogem naraščanju so neenakosti stroge. Za padajoča zaporedja obrnemo vse neenakosti. Obratni sklepi samo iz enega podzaporedja na celotno zaporedje niso veljavni.

6.2 Omejeno padajoče in neomejeno naraščajoče podzaporedje

Določimo

$$a_{2k-1} = \frac{1}{k}, \qquad a_{2k} = k, \qquad k \geq 1.$$

Celotno zaporedje je $1, 1, 1/2, 2, 1/3, 3, \ldots$. Lihi členi $b_k = 1/k$ so omejeni z $0 < b_k \leq 1$ in strogo padajo, ker

$$b_{k+1} - b_k = -\frac{1}{k(k+1)} < 0.$$

Sodi členi $c_k = k$ so strogo naraščajoči, ker je $c_{k+1} - c_k = 1 > 0$, navzgor pa niso omejeni: za vsak M izberemo $k > M$. Celotno zaporedje ni navzgor omejeno, saj že njegovi sodi členi presegajo vsako mejo. Ni monotono, saj $a_3 < a_2$, toda $a_4 > a_3$. To pokaže hkrati:

- omejeno podzaporedje ne zagotavlja omejenosti celotnega zaporedja;
- monotono podzaporedje ne zagotavlja monotonosti celotnega zaporedja;
- strogo naraščajoče zaporedje ni nujno navzgor omejeno.

6.3 Dve monotoni veji omejenega zaporedja

Za $a_n = (-1)^n/n$ sta

$$b_k = a_{2k-1} = -\frac{1}{2k-1}, \qquad c_k = a_{2k} = \frac{1}{2k}.$$

Razliki sta

$$b_{k+1} - b_k = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} > 0, \qquad c_{k+1} - c_k = -\frac{1}{2k(k+1)} < 0.$$

Lihi členi strogo naraščajo v intervalu $[-1, 0)$, sodi strogo padajo v $(0, 1/2]$. Celotno zaporedje je omejeno, vendar ni monotono.

7 Stekališča pred limito

Definicija: stekališče

Število $S \in \mathbb{R}$ je stekališče zaporedja (a_n), če je v vsaki njegovi okolici neskončno mnogo členov, štetih po indeksih. Enakovredno:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : \quad |a_n - S| < \varepsilon.}$$

Če je ustreznih indeksov neskončno mnogo, ne morejo biti vsi manjši od nekega N. Obratno: če bi jih bilo le končno mnogo, bi izbrali N večji od vseh in pogoj bi odpovedal. To pojasni enakovrednost opisov. Pomembni so *indeksi*, ne število različnih vrednosti: konstantno zaporedje ima stekališče, čeprav ima le eno vrednost.

7.1 Prvi zgledi in izbira indeksa

Pri $a_n = 1/n$ je $S = 0$ stekališče. Za poljubna $\varepsilon > 0$ in N vzamemo

$$n = \max\left\{N, \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1\right\}.$$

Potem je $n \geq N$ in $n > 1/\varepsilon$, torej $|a_n| = 1/n < \varepsilon$. Noben člen ni 0, a to ni ovira. Pri $a_n = (-1)^n$ sta stekališči 1 in -1: za 1 izberemo poljuben dovolj velik sod indeks, za -1 lih indeks. Razdalja do izbrane vrednosti je 0. Drugih stekališč ni: če $S \notin \{-1, 1\}$, je $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|S-1|, |S+1|\} > 0$ in v tej okolici ni nobenega člena.

7.2 Dve stekališči, ki nista člena zaporedja

Obravnavajmo različico

$$a_n = \frac{3}{2} - (-1)^n \frac{n+2}{2n}, \qquad n \geq 1.$$

Ker je $(n+2)/(2n) = 1/2 + 1/n$, za sode in lihe indekse izračunamo

$$a_{2k} = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right) = 1 - \frac{1}{2k},$$
$$a_{2k-1} = \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k-1}\right) = 2 + \frac{1}{2k-1}.$$

Sodi členi strogo naraščajo proti 1, lihi strogo padajo proti 2. Velja $1/2 \leq a_n \leq 3$. Noben člen ni enak 1 ali 2. Pri različici s plusom pred $(-1)^n$ se vlogi sodih in lihih indeksov zamenjata; stekališči ostaneta 1 in 2.

Za $S = 1$ in dana ε, N izberemo sod $n \geq N$ z $n > 1/\varepsilon$; za $S = 2$ izberemo tak lih n. V obeh primerih je $|a_n - S| = 1/n < \varepsilon$. Natančno: naj bo $T = \max\{N, \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1\}$. Če ima T pravilno parnost, vzamemo $n = T$, sicer $n = T + 1$.

Pokažimo še, da ni drugih stekališč. Če $S \notin \{1, 2\}$, je $d = \min\{|S-1|, |S-2|\} > 0$. Vzemimo $\varepsilon = d/3$ in $N > 3/d$. Za vsak $n \geq N$ je člen od svoje pripadajoče vrednosti $c \in \{1, 2\}$ oddaljen za $1/n < d/3$. Po obratni trikotniški neenakosti

$$|a_n - S| \geq |c - S| - |a_n - c| > d - \frac{d}{3} = \frac{2d}{3} > \varepsilon.$$

Torej v izbrani okolici ni nobenega dovolj poznega člena.

7.3 Stekališče kot limita podzaporedja

Če je S stekališče, izberemo n_1 z $|a_{n_1} - S| < 1$. Ko smo izbrali n_k, uporabimo definicijo z $N = n_k+1$ in $\varepsilon = 1/(k+1)$ ter dobimo $n_{k+1} > n_k$ z $|a_{n_{k+1}} - S| < 1/(k+1)$. Tako je $|a_{n_k} - S| < 1/k$. Za dani $\varepsilon > 0$ so zato vsi členi tega podzaporedja z $k > 1/\varepsilon$ od S oddaljeni za manj kot ε: podzaporedje konvergira k S v smislu naslednje definicije. Obratno, če podzaporedje konvergira k S, lahko izberemo tako velik k, da hkrati velja $n_k \geq N$ in $|a_{n_k} - S| < \varepsilon$. S tem dobimo zahtevani člen za poljubna N in ε.

8 Limita: vsi dovolj pozni členi

Definicija: limita zaporedja

Število $L \in \mathbb{R}$ je limita zaporedja (a_n), če

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \quad |a_n - L| < \varepsilon.}$$

Pišemo $a_n \to L$ ali $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Zaporedje je *konvergentno*, če ima končno realno limito; sicer je divergentno.

Pri stekališču za vsakim pragom najdemo *vsaj en* ustrezen člen. Pri limiti morajo biti ustrezni *vsi* členi od nekega praga naprej. Indeks N sme biti odvisen od ε, ne sme pa biti odvisen od poznejše izbire n. Končno mnogo začetnih izjem ne spremeni limite.

8.1 Celoten dokaz za $1/n$ in strogi rob okolice

Za $a_n = 1/n$ in $L = 0$ je

$$|a_n - L| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Zato izberemo

$$\boxed{N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1.}$$

Za vsak $n \geq N$ je $1/n \leq 1/N < \varepsilon$, kar zaključi dokaz. Za $\varepsilon = 1/10$ je najmanjši zadostni $N = 11$, ker je člen pri $n = 10$ natanko na robu in stroga neenakost še ne velja.

ε	$1/2$	$1/4$	$1/10$	$1/50$	$1/100$
Najmanjši N	3	5	11	51	101

Za $a_n = (n-1)/(n+1)$ in $L = 1$ je

$$|a_n - 1| = \frac{2}{n+1} < \varepsilon \iff n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Če dovolimo $n \geq 0$, je najmanjši nenegativni prag $N = \max\{0, \lfloor 2/\varepsilon - 1 \rfloor + 1\}$. V definiciji z naravnim $N \geq 1$ uporabimo isti izraz z 1 namesto 0; na primer za $\varepsilon = 1/10$ zadostuje in je najmanjši $N = 20$.

8.2 Dušeno nihanje brez posebnega izreka o primerjavi

Za $b_n = \sin(n\pi/4)/n$, $n \geq 1$, so prvi členi

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad 0, \quad -\frac{\sqrt{2}}{10}, \quad -\frac{1}{6}, \ldots$$

Ker je $|\sin t| \leq 1$, velja $|b_n| \leq 1/n$. Za dani ε izberemo $N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$. Potem za vsak $n \geq N$ neposredno dobimo

$$|b_n - 0| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

To je dokaz po definiciji. Enaka izbira N dokazuje $\sin n/n \to 0$ in $(-1)^n/n \to 0$. Členi lahko spreminjajo predznak, čeprav zaporedje konvergira.

8.3 Zakaj je limita enolična?

Predpostavimo, da sta L in K različni limiti, ter postavimo $d = |L - K| > 0$ in $\varepsilon = d/3$. Za vse dovolj velike n bi hkrati veljalo $|a_n - L| < d/3$ in $|a_n - K| < d/3$. Trikotniška neenakost da

$$d = |L - K| \leq |L - a_n| + |a_n - K| < \frac{2d}{3},$$

kar je protislovje. Zato ima zaporedje največ eno limito.

8.4 Konvergenca, omejenost in podzaporedja

Vsako konvergentno zaporedje je omejeno. V definiciji izberemo $\varepsilon = 1$. Od nekega N naprej so vsi členi v $(L - 1, L + 1)$. Pred tem je le končno mnogo členov, zato lahko vzamemo

$$M = \max\{1, |L| + 1, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|\}.$$

Za vse n je $|a_n| \leq M$, torej $-M \leq a_n \leq M$. Pri indeksiranju od 0 v končni seznam dodamo še $|a_0|$. Obrat ne velja: $(-1)^n$ je omejeno, pa ne konvergira.

Vsako podzaporedje konvergentnega zaporedja ima isto limito. Za dani ε izberemo N, ki velja za (a_n). Ker je $n_k \geq k$, za $k \geq N$ velja $n_k \geq N$, zato $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$. To je definicija konvergence podzaporedja. Če imata dve podzaporedji različni limiti, celotno zaporedje zato ne konvergira. Zlasti $(-1)^n$ nima limite: sodi členi imajo limito 1, lihi pa -1.

Vsaka limita je stekališče. Za dana $\varepsilon > 0$ in poljuben prag N_0 vzamemo prag N_ε iz definicije limite in $n = \max\{N_0, N_\varepsilon\}$. Tedaj $n \geq N_0$ in $|a_n - L| < \varepsilon$. Poleg tega konvergentno zaporedje nima drugih stekališč: vsako stekališče je limita nekega podzaporedja, vsa podzaporedja pa imajo isto limito.

8.5 Eno stekališče še ne zadošča

Naj bo

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ sod}, \\ n, & n \text{ lih}. \end{cases}$$

Število 0 je stekališče, ker je neskončno mnogo sodih členov enakih 0. Za vsak $S \neq 0$ vzemimo $\varepsilon = |S|/2$. Sodi členi so od S oddaljeni za $|S| > \varepsilon$. Za lihe $n > |S| + \varepsilon$ pa je $|a_n - S| = |n - S| \geq n - |S| > \varepsilon$. V tej okolici je torej kvečjemu končno mnogo členov; drugih stekališč ni. Limite vseeno ni, saj je zaporedje neomejeno. Neposredno: za $\varepsilon = 1$ vedno najdemo poljubno velik lih n z $|a_n - 0| \geq 1$.

9 Monotona omejena zaporedja konvergirajo

Konvergenca monotonega zaporedja

Naraščajoče in navzgor omejeno realno zaporedje konvergira. Padajoče in navzdol omejeno realno zaporedje prav tako konvergira.

Dokaz za naraščajoče zaporedje. Naj bo $L = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, najmanjša zgornja meja množice členov. Obstoj L zagotavlja polnost realnih števil. Za poljuben $\varepsilon > 0$ število $L - \varepsilon$ ni zgornja meja, sicer L ne bi bil najmanjša. Obstaja torej N z $a_N > L - \varepsilon$. Zaradi naraščanja za vsak $n \geq N$ velja

$$L - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq L,$$

zato $|a_n - L| = L - a_n < \varepsilon$. To je zahtevana konvergenca.

Dokaz za padajoče zaporedje. Vzamemo $L = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, največjo spodnjo mejo. Število $L + \varepsilon$ ni spodnja meja, zato obstaja N z $a_N < L + \varepsilon$. Pri $n \geq N$ je $L \leq a_n \leq a_N < L + \varepsilon$, od koder $|a_n - L| < \varepsilon$.

Za $(n-1)/(n+1)$ smo že dokazali naraščanje in zgornjo mejo 1; izrek torej zagotavlja obstoj limite. Da je limita prav 1, smo dodatno pokazali z oceno $|a_n - 1| = 2/(n+1)$. Samo podatek, da je M neka zgornja meja, še ne pomeni, da je limita M.