Računanje limit

Pri računanju limit izhajamo iz definicije in pravil, katerih pogoje moramo vedno preveriti. Najprej obravnavamo preproste zglede, nato zahtevnejše limite s številom e in koreni. Na koncu uvedemo vrste kot limite delnih vsot.

Učni cilji

- utemeljiti pravila za vsoto, produkt in kvocient limit;
- preveriti pogoje pred uporabo pravila za potence;
- izračunati limite racionalnih izrazov, decimalnih približkov in korenov;
- razumeti, zakaj $(1 + 1/n)^n$ zahteva poseben argument.

1 Ponovitev: definicija in prag natančnosti

Definicija: limita realnega zaporedja

Število L je limita zaporedja (a_n), če

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \qquad |a_n - L| < \varepsilon.$$

1.1 Celi del in zaokroževanje navzgor

Pri izbiri celoštevilskega indeksa bomo uporabljali naslednji funkciji.

Definicija: spodnji in zgornji celi del

Za $x \in \mathbb{R}$ je *spodnji celi del* (angl. *floor*)

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\},$$

torej največje celo število, ki ni večje od x. *Zgornji celi del* (angl. *ceiling*) je

$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\},$$

torej najmanjše celo število, ki ni manjše od x. Velja

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \qquad \lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil.$$

Na primer,

$$\lfloor 2{,}7 \rfloor = 2, \quad \lceil 2{,}7 \rceil = 3, \qquad \lfloor -2{,}7 \rfloor = -3, \quad \lceil -2{,}7 \rceil = -2.$$

Pri celem številu ni spremembe: $\lfloor 3 \rfloor = \lceil 3 \rceil = 3$. To ni zaokroževanje na najbližje celo število: spodnji celi del vedno zaokroži navzdol, tudi pri negativnih številih.

Če potrebujemo celo število $n > T$, je najmanjša celoštevilska izbira $\lfloor T \rfloor + 1$. Če potrebujemo le $n \geq T$, je najmanjša izbira $\lceil T \rceil$. Razlika je pomembna, kadar je T celo število: pri $T = 10$ stroga neenakost zahteva $n \geq 11$, nestroga pa dopušča $n = 10$. Zato za $1/n < \varepsilon$ izberemo $N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$; tako je $n > 1/\varepsilon$ za vsak $n \geq N$, tudi kadar je $1/\varepsilon$ celo število.

V teh zapiskih uporabljamo dogovor $n \geq N$. Zapis z $n > N$ je enakovreden, vendar se lahko najmanjši celoštevilski prag razlikuje za 1. Najprej izberemo ε, nato določimo en sam N,

ki deluje za vse poznejše člene. Število N ni nujno najmanjše možno. Za $a_n = 1/n$ je $|a_n| < \varepsilon$ natanko tedaj, ko $n > 1/\varepsilon$. Zato lahko vzamemo $N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$. Pri $\varepsilon = 0{,}1$ dobimo $N = 11$; člen $1/10$ je na robu in ne zadošča.

Stekališče zahteva le poljubno pozne ustrezne člene, limita pa vse dovolj pozne člene. Zato je vsaka limita stekališče, obratno pa ne velja. Naraščajoče in navzgor omejeno zaporedje konvergira; podobno velja za padajoče in navzdol omejeno zaporedje. Ta izrek bomo uporabili pri dokazu obstoja limite $(1 + 1/n)^n$.

2 Pravila za računanje limit z utemeljitvami

Naj bo $a_n \to a$ in $b_n \to b$, kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$.

2.1 Vsota, razlika in konstantni faktor

Za vsoto ocenimo

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Za dani $\varepsilon > 0$ izberemo N_a, da je prvi člen manjši od $\varepsilon/2$, in N_b, da je drugi manjši od $\varepsilon/2$. Pri $n \ge \max\{N_a, N_b\}$ je vsota napak manjša od ε. Torej $a_n + b_n \to a + b$. Pri razliki uporabimo isto oceno z minusom: $|(a_n - b_n) - (a - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b|$. Za konstantni $c \neq 0$ velja $|ca_n - ca| = |c|\,|a_n - a|$, zato zahtevamo $|a_n - a| < \varepsilon/|c|$. Za $c = 0$ je trditev neposredna.

2.2 Produkt: zakaj potrebujemo omejenost?

Razliko razstavimo tako, da nastopita znani napaki:

$$a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a),$$
$$|a_n b_n - ab| \le |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a|.$$

Od nekega N_0 naprej je $|a_n - a| < 1$, zato $|a_n| \le |a| + 1 =: C$. Izberemo še praga za

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C}, \qquad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)}.$$

Za n nad vsemi tremi pragovi je desna stran manjša od $\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Zato $a_n b_n \to ab$. Z večkratno uporabo dobimo pravilo za vsako fiksno naravno potenco, na primer $a_n^2 \to a^2$.

2.3 Recipročna vrednost in kvocient

Naj bo $b \neq 0$. Za vse dovolj velike n lahko zahtevamo $|b_n - b| < |b|/2$. Po obratni trikotniški neenakosti tedaj

$$|b_n| \ge |b| - |b_n - b| > \frac{|b|}{2} > 0.$$

Torej je imenovalec od nekega mesta naprej neničeln in

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \le \frac{2}{|b|^2}|b_n - b|.$$

Če dodatno zahtevamo $|b_n - b| < \varepsilon|b|^2/2$, dobimo napako manjšo od ε. Zato $1/b_n \to 1/b$ in po pravilu za produkt

$$\boxed{\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b} \qquad (b \neq 0).}$$

Morebitne začetne ničle imenovalca izpustimo iz definicijskega območja. Če je $b = 0$, tega pravila ne smemo uporabiti: $1/(1/n) = n$ nima končne limite.

2.4 Pozitivne osnove in spremenljivi eksponenti

Če $a_n > 0$, $a_n \to a > 0$ in $b_n \to b \in \mathbb{R}$, velja

$$a_n^{b_n} \to a^b.$$

Pri tem pravilu uporabimo znano zveznost realnih funkcij log in exp. Natančneje: zveznost log v pozitivni točki a pomeni, da za vsako zahtevano napako $\eta > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $|x - a| < \delta$ sledi $|\log x - \log a| < \eta$. Ker $a_n \to a$, od nekega mesta naprej velja $|a_n - a| < \delta$; zato $\log a_n \to \log a$. Pravilo za produkt nato da $b_n \log a_n \to b \log a$. Na enak način uporabimo zveznost exp in dobimo

$$a_n^{b_n} = \exp(b_n \log a_n) \to \exp(b \log a) = a^b.$$

To je uporaba zveznosti, ne zgolj formalno vstavljanje limit v eksponente. Zveznost teh dveh funkcij je tu navedeno predznanje; za konstanto pod korenom bomo spodaj podali tudi dokaz brez logaritmov.

Pozor: nedoločene oblike

Pravilo zahteva $a > 0$ in končen b. Iz $a_n \to 1$ in $b_n \to +\infty$ ne smemo sklepati na 1; primer $(1 + 1/n)^n$ je obravnavan posebej. Zapis ∞/∞ prav tako ni pravilo za kvocient: najprej moramo izraz algebraično preoblikovati.

3 Kaj gre narobe brez predpostavk?

3.1 Vsota in razlika: neobstoječih limit ne smemo seštevati

Za $a_n = (-1)^n$ in $b_n = 1/n$ ima vsota sodo podzaporedje $a_{2k} + b_{2k} = 1 + 1/(2k) \to 1$ in liho podzaporedje $a_{2k-1} + b_{2k-1} = -1 + 1/(2k-1) \to -1$. Različni limiti podzaporedij izključujeta konvergenco. Predpostavka konvergence obeh členov je bistvena. Vendar neizpolnjene predpostavke še ne pomenijo divergence rezultata:

$$(-1)^n + (-(-1)^n) = 0.$$

Nobeden od seštevancev nima limite, vsota pa je konstantna. Pri odštevanju je enak pojav $(-1)^n - (-1)^n = 0$.

3.2 Produkt in nedoločena oblika nič krat neskončno

Izraz $0 \cdot \infty$ ni račun z realnima limitama. Zaporedje n nima končne realne limite, zato zanj pravilo za produkt ne velja. Trije zgledi z enakim opisom prvega faktorja $1/n \to 0$ so

$$\frac{1}{n} \cdot n = 1, \qquad \frac{1}{n} \cdot n^2 = n, \qquad \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Za zadnjo limito neposredno zahtevamo $n > 1/\varepsilon^2$. Oblika $0 \cdot \infty$ torej sama ne določa rezultata. Tudi nihajoča faktorja lahko dasta konvergenten produkt: $(-1)^n(-1)^n = 1$.

3.3 Kvocient in nedoločena oblika nič skozi nič

Pogoj $b_n \neq 0$ za vsak n še ni dovolj: potrebujemo tudi $b \neq 0$. Primerjajmo

$$\frac{1/n}{1/n} = 1, \qquad \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \to 0, \qquad \frac{1/n}{1/n^2} = n.$$

V vseh treh primerih števec in imenovalec konvergirata k 0, rezultati pa so različni. Najprej krajšamo celoten izraz pri dovoljenih indeksih; izraza $0/0$ ne smemo obravnavati kot realno število.

3.4 Potenciranje in oblika ena na neskončno

Pri $a_n = 1 + 1/n$ je limita osnove 1, eksponent n pa raste brez meje. Pravilo za $a_n^{b_n}$ zahteva končno limito eksponenta in tukaj ne velja. Poseben dokaz da $(1 + 1/n)^n \to e$, kvadrat tega zaporedja pa konvergira k e^2. Nobena od teh limit ni 1. Če je osnova negativna, realna potenca niti ni vedno definirana: $(-1)^{1/n}$ pri sodem n nima realne vrednosti. Pri fiksnem celoštevilskem eksponentu te ovire ni: če $a_n \to a \in \mathbb{R}$, je na primer $a_n^2 \to a^2$ po pravilu za produkt, tudi če so nekateri a_n negativni.

3.5 Limita funkcijske vrednosti in zveznost

Iz $a_n \to a$ ne sledi brez dodatnega pogoja, da je $f(a_n) \to f(a)$. Protiprimer je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \qquad a_n = \frac{1}{n}.$$

Ker je vsak $a_n \neq 0$, je $f(a_n) = 0$ in $\lim f(a_n) = 0$. Toda $f(\lim a_n) = f(0) = 1$. Vrednosti se razlikujeta, ker f ni zvezna v 0. Če je f zvezna v a, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $|x - a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Konvergenca $a_n \to a$ zagotovi $|a_n - a| < \delta$ od nekega N naprej. Zato za vse $n \geq N$ velja $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$, kar dokazuje $f(a_n) \to f(a)$.

4 Lažji zgledi računanja limit

4.1 Osnovne vsote in potence

Konstantno zaporedje c ima limito c, saj je $|c - c| = 0 < \varepsilon$ za poljuben $\varepsilon > 0$. Iz $1/n \to 0$ zato dobimo

$$1 + \frac{1}{n} \to 1, \qquad \frac{3}{n} = 3 \cdot \frac{1}{n} \to 0, \qquad \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0.$$

Za zadnji primer lahko uporabimo tudi definicijo: $1/n^2 < \varepsilon$ velja natanko pri $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$; zadostuje $N = \lfloor 1/\sqrt{\varepsilon} \rfloor + 1$.

4.2 Ničelna limita kljub nihanju: $\sin(n)/n$

Obravnavajmo $c_n = \sin(n)/n$, kjer je kot n izražen v radianih. Pravila za kvocient ne moremo uporabiti neposredno z imenovalcem n, saj ta nima končne realne limite. Tudi zapis $c_n = \sin(n) \cdot (1/n)$ sam po sebi še ne upraviči uporabe pravila za produkt: za to pravilo bi morali poznati konvergenco obeh faktorjev. Tu uporabimo le omejenost sinusa, $|\sin(n)| \leq 1$:

$$|c_n - 0| = \frac{|\sin(n)|}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$. Izberemo

$$N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

Za vsak $n \geq N$ velja $n > 1/\varepsilon$, zato je $|c_n| \leq 1/n < \varepsilon$. Po definiciji sledi

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.}$$

Nihanje števca torej ne prepreči konvergence kvocienta: absolutna vrednost napake je za vse poznejše člene vedno manjša od predpisane natančnosti.

Isti argument velja splošneje. Če je $|u_n| \leq M$ in $v_n \to 0$, potem $u_n v_n \to 0$. Pri $M = 0$ je produkt identično nič. Pri $M > 0$ za dani $\varepsilon > 0$ iz konvergence v_n izberemo N, da za vsak $n \geq N$ velja $|v_n| < \varepsilon/M$. Tedaj

$$|u_n v_n| \leq M|v_n| < \varepsilon.$$

Za prvi faktor torej zadošča omejenost; njegova konvergenca ni potrebna.

4.3 Racionalni izraz enakih stopenj

Izračunajmo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{3n^2+n+1}.$$

Najprej razširimo števec, nato števec in imenovalec delimo z n^2:

$$\frac{(n+2)^2}{3n^2+n+1} = \frac{n^2+4n+4}{3n^2+n+1} = \frac{1+4/n+4/n^2}{3+1/n+1/n^2}.$$

Podrobneje označimo

$$A_n = 1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}, \qquad B_n = 3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Zaporedje 1 je konstantno, $4/n = 4 \cdot (1/n) \to 0$ in $4/n^2 = 4 \cdot (1/n) \cdot (1/n) \to 0$. Po pravilu za vsoto je torej $A_n \to 1 + 0 + 0 = 1$. Enako dobimo $B_n \to 3 + 0 + 0 = 3 \neq 0$. Poleg tega je $B_n > 0$ za vsak $n \geq 1$, zato so vsi kvocienti definirani. Pravilo za kvocient zato da limito $1/3$. Kot dodatno preverjanje izračunamo napako:

$$\begin{aligned} \frac{(n+2)^2}{3n^2+n+1} - \frac{1}{3} &= \frac{3(n^2+4n+4) - (3n^2+n+1)}{3(3n^2+n+1)} \\ &= \frac{11(n+1)}{3(3n^2+n+1)}. \end{aligned}$$

Za $n \geq 1$ je $n + 1 \leq 2n$ in $3n^2 + n + 1 \geq 3n^2$, zato je absolutna napaka največ $22/(9n)$. Izbira $N = \lfloor 22/(9\varepsilon) \rfloor + 1$ je tako konkreten zadostni prag.

4.4 Racionalni izraz s kubičnimi členi

Razvijemo $(1-n)^3 = 1 - 3n + 3n^2 - n^3$ in delimo z n^3:

$$\frac{(1-n)^3}{1+2n^2+3n^3} = \frac{-1+3/n-3/n^2+1/n^3}{3+2/n+1/n^3} \longrightarrow \frac{-1}{3}.$$

Vsi členi z negativnimi potencami n gredo proti 0; to sledi iz pravila za produkt, ker je na primer $1/n^3 = (1/n)^3$. Imenovalčeva limita je 3, zato je uporaba kvocienta dovoljena.

4.5 Končna decimalna števila z vedno več trojkami

Naj ima $a_n = 0,\underbrace{33\cdots3}_{n \text{ mest}}$ natanko n trojk. To je končna vsota

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k}.$$

Če jo označimo s S, je $S/10$ ista vsota, premaknjena za eno mesto. Odštevanje da

$$S - \frac{S}{10} = \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}}, \qquad S = \frac{1}{3}(1 - 10^{-n}).$$

Za $\varepsilon > 0$ napaka znaša $|a_n - 1/3| = 1/(3 \cdot 10^n)$. Ker je $10^n \geq n$ za $n \geq 1$ (kar sledi z indukcijo), zadostuje $n > 1/(3\varepsilon)$. Tako neposredno dokažemo $a_n \to 1/3$.

4.6 Konstantna osnova pod n-tim korenom

Iz pravila za pozitivne potence dobimo

$$\sqrt[n]{2} = 2^{1/n} \to 2^0 = 1, \qquad 3^{1/n} \to 3^0 = 1.$$

Drugi izraz ni $3/n$: izraz $3/n$ gre proti 0, izraz $3^{1/n}$ pa proti 1. Podajmo za $\sqrt[n]{2}$ še elementaren dokaz. Naj bo $x_n = \sqrt[n]{2} - 1 > 0$. Bernoullijeva neenakost pravi $(1+x)^n \geq 1 + nx$ za $x \geq 0$; pri $n = 1$ velja enakost, indukcijski korak pa je

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

Vstavimo $x = x_n$:

$$2 = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n \quad \Longrightarrow \quad 0 < x_n \leq \frac{1}{n}.$$

Za $n \geq \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$ je zato $|\sqrt[n]{2} - 1| = x_n < \varepsilon$. Za 3 ista izpeljava da $0 < \sqrt[n]{3} - 1 \leq 2/n$, torej spet limito 1.

5 Izračun zadostnega indeksa iz natančnosti

Za vsak zgled najprej izračunamo ali ocenimo napako, nato rešimo strogo neenakost. Celoštevilski prag prilagodimo dogovoru $n \geq N$.

Zgled: vsota in razlika

Za $a_n = 1 + 1/n$ in $b_n = 2 + 2/n$ sta

$$a_n + b_n = 3 + \frac{3}{n}, \qquad a_n - b_n = -1 - \frac{1}{n}.$$

Zato za vsoto zadošča $N = \lfloor 3/\varepsilon \rfloor + 1$, za razliko pa $N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$.

Zgled: produkt

Za $a_n = 2 + 1/n$ in $b_n = 3 + 1/n$ je

$$a_n b_n = 6 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}, \qquad |a_n b_n - 6| = \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \le \frac{6}{n} \quad (n \ge 1).$$

Zato je $N = \lfloor 6/\varepsilon \rfloor + 1$ zadosten, četudi ni vedno najmanjši.

Zgled: kvocient

Za $c_n = (1 + 1/n)/(2 + 1/n) = (n + 1)/(2n + 1)$ dobimo

$$c_n - \frac{1}{2} = \frac{2(n+1) - (2n+1)}{2(2n+1)} = \frac{1}{4n+2}.$$

Pogoj $1/(4n + 2) < \varepsilon$ je enakovreden $n > (1/\varepsilon - 2)/4$. Najmanjši pozitivni prag je zato

$$N = \max\left\{1, \left\lfloor \frac{1/\varepsilon - 2}{4} \right\rfloor + 1\right\}.$$

Zgled: potenca in koren

Za $c_n = (2 + 1/n)^2$ je $|c_n - 4| = 4/n + 1/n^2 \le 5/n$, zato zadošča $N = \lfloor 5/\varepsilon \rfloor + 1$. Pri $c_n = 2^{1/n}$ pa lahko uporabimo naraščanje naravnega logaritma:

$$2^{1/n} < 1 + \varepsilon \iff \frac{\ln 2}{n} < \ln(1 + \varepsilon) \iff n > \frac{\ln 2}{\ln(1 + \varepsilon)}.$$

Torej je $N = \lfloor \ln 2 / \ln(1 + \varepsilon) \rfloor + 1$ najmanjši zadostni pozitivni indeks. Prejšnji dokaz z Bernoullijevo neenakostjo da preprostejši, vendar praviloma večji prag $\lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$.

5.1 Zelo počasno približevanje: recipročni logaritem

Tukaj naj $\log n = \log_{10} n$ in $n \ge 2$. Logaritem je pozitiven in naraščajoč, zato je $1/\log n$ pozitivno padajoče zaporedje. Za dano $\varepsilon > 0$ velja

$$\frac{1}{\log_{10} n} < \varepsilon \iff \log_{10} n > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > 10^{1/\varepsilon}.$$

Najmanjši zadostni indeks je

$$\boxed{N = \lfloor 10^{1/\varepsilon} \rfloor + 1.}$$

Za $\varepsilon = 0{,}1$ potrebujemo $N = 10^{10} + 1$: člen pri 10^{10} je natanko na robu. Za vsak $n \ge N$ je $\log_{10} n > 1/\varepsilon$, zato $|1/\log_{10} n| < \varepsilon$. S tem smo dokazali limito 0. Pri naravnem logaritmu ln isti postopek da $N = \lfloor \exp(1/\varepsilon) \rfloor + 1$; osnovi ne smemo zamenjati. Monotonost in spodnja meja sami zagotavljata le obstoj limite; njeno vrednost 0 potrdi zgornji argument z ε.

6 Zahtevnejši zgledi zaporedij

Naslednji zgledi zahtevajo več kakor neposredno uporabo pravil za vsoto in kvocient. Zato jih obravnavamo šele po osnovnih zgledih.

6.1 Zahtevnejši zgled: $\sqrt[n]{n} \to 1$

Za $n \geq 1$ je $\sqrt[n]{n} \geq 1$. Postavimo $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Za $n \geq 2$ binomski izrek in nenegativnost vseh členov dasta

$$\begin{aligned} n = (1 + x_n)^n &= 1 + nx_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \cdots + x_n^n \\ &\geq \binom{n}{2} x_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} x_n^2. \end{aligned}$$

Delimo s pozitivnim $n(n-1)/2$ in korenimo:

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Za poljuben $\varepsilon > 0$ izberemo

$$N = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 2.$$

Pri $n \geq N$ je $n - 1 > 2/\varepsilon^2$, zato

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon.$$

To dokazuje limito 1. Pravila za spremenljivo potenco ne moremo uporabiti neposredno z osnovo n, saj osnova nima končne pozitivne limite.

6.2 Zahtevnejši zgled: obstoj števila e

Naj bo $u_n = (1 + 1/n)^n$, $n \geq 1$. Ne smemo zapisati »$1^\infty = 1$«: osnova se spreminja hkrati z eksponentom. Pokazali bomo, da (u_n) narašča in je navzgor omejeno. Binomski izrek da

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right). \end{aligned}$$

Pri $k = 0$ razumemo produkt brez faktorjev kot 1. Za $0 \leq k \leq n$ so vsi faktorji v $(0, 1]$; pri povečanju n na $n + 1$ se vsak faktor $1 - j/n$ ne zmanjša. Zato se pri primerjavi u_{n+1} z u_n nobeden od členov z $k \leq n$ ne zmanjša, poleg tega pa u_{n+1} vsebuje še nov, pozitiven člen za $k = n + 1$. Torej je $u_{n+1} > u_n$.

Za zgornjo mejo uporabimo oceno vsakega produkta z 1:

$$u_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Za $k \geq 1$ velja $k! \geq 2^{k-1}$: v produktu $1 \cdot 2 \cdots k$ je vseh $k - 1$ faktorjev od 2 do k vsaj 2. Zato

$$u_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 2(1 - 2^{-n}) = 3 - 2^{1-n} < 3.$$

Uporabili smo končno geometrijsko vsoto; njeno formulo dobimo z odštevanjem polovice vsote od prvotne vsote. Po izreku o monotonih omejenih zaporedjih obstaja končna limita.

Definicija: število e

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718281828\ldots$$

Ker je $u_2 = 9/4 > 2$ in zaporedje narašča, je $e > 2$. Dokazana zgornja ocena zagotavlja $e \le 3$; za obstoj limite to povsem zadošča.

6.3 Zakaj dobimo isto število e kot pri eksponentni funkciji?

Če je e že uveden neodvisno kot $\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$, prejšnji dokaz zagotovi neko limito L. Pokažimo, da je $L = e$. Iz binomskega zapisa in ocene produktov z 1 sledi

$$u_n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \le e, \qquad \text{zato } L \le e.$$

Za obratno neenakost fiksiramo naravno število m. Pri $n \ge m$ smemo odvreči pozitivne člene z $k > m$ in dobimo

$$u_n \ge \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Zdaj gre n proti neskončnosti, m pa ostaja fiksen. Vsak od končno mnogo produktov gre proti 1, zato $L \ge \sum_{k=0}^{m} 1/k!$. To velja za vsak m; ko nato povečujemo m, delne vsote gredo proti e. Sledi $L \ge e$, skupaj s prejšnjo oceno pa $L = e$. Tu ne zamenjujemo limite in neskončne vsote: najprej fiksiramo končno število členov, šele na koncu povečamo to število.

6.4 Ocena napake za interaktivni prikaz

Za $u_n = (1 + 1/n)^n$ lahko brez logaritmov izpeljemo

$$0 < e - u_n \le \frac{e}{2n}.$$

Če so $x_j \in [0,1]$, velja $1 - \prod_j (1 - x_j) \le \sum_j x_j$. Za dva faktorja je to $x_1 + x_2 - x_1 x_2 \le x_1 + x_2$; splošni primer sledi z indukcijo, ker pri dodajanju faktorja $1 - x$ dobimo dodaten prispevek $x \prod_j (1 - x_j) \le x$. Za $k \le n$ vstavimo $x_j = j/n$ in dobimo

$$1 - \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \le \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{n} = \frac{k(k-1)}{2n}.$$

Za manjkajoče člene s $k > n$ uporabimo oceno $1 \le k(k-1)/(2n)$, ki velja že pri $k = n+1$, saj je $(n+1)/2 \ge 1$. Ko od vsote za e odštejemo binomski razvoj za u_n, zato sledi

$$0 < e - u_n \le \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} = \frac{1}{2n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} = \frac{e}{2n}.$$

Za dani ε je torej $N = \lfloor e/(2\varepsilon) \rfloor + 1$ zadosten indeks. Pri kvadratu $u_n^2 \to e^2$ dobimo še

$$0 < e^2 - u_n^2 = (e - u_n)(e + u_n) < \frac{e}{2n}\, 2e = \frac{e^2}{n},$$

zato zadošča $N = \lfloor e^2/\varepsilon \rfloor + 1$. Oba praga sta zadostna in nista nujno najmanjša.

6.5 Zahtevnejši zgled: $(1 - 1/n)^{-n} \to e$

Izraz obravnavamo za $n \geq 2$, saj je pri $n = 1$ osnova 0 in negativen eksponent ni dovoljen. Preoblikujemo

$$v_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = u_{n-1}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right).$$

Premik indeksa ne spremeni limite: če je za u_m potreben prag $m \geq M$, za u_{n-1} zadošča $n \geq M + 1$. Zato $u_{n-1} \to e$. Drugi faktor gre proti 1, ker $1/(n-1) \to 0$. Pravilo za produkt zato da $v_n \to e \cdot 1 = e$. Tu sploh nismo potrebovali pravila za spremenljiv eksponent.

7 Od končnih zaporedij k vrstam

7.1 Končno zaporedje ni neskončno zaporedje

Zaporedje je lahko definirano samo za $n = 1, \ldots, m$. Na primer pri $m = 5$ dobimo $1, 2, 3, 4, 5$ ali $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$. Končna množica realnih vrednosti ima minimum in maksimum, zato je vsako končno realno zaporedje omejeno. Monotonost preverjamo za vse sosednje pare, ki obstajajo. O limiti pri $n \to \infty$ ne govorimo, ker poljubno velikih indeksov v definicijskem območju ni.

7.2 Končna vsota in delne vsote

Končno vsoto členov zapišemo

$$S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m = \sum_{k=1}^{m} a_k.$$

Seštevalni indeks k je pomožna oznaka; po seštevanju ne ostane v rezultatu. Za $a_k = k$ dobimo

$$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \qquad S_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050.$$

Formulo $S_m = m(m+1)/2$ izpeljemo tako, da isto vsoto zapišemo še v obratnem vrstnem redu. Vsak od m parov ima vsoto $m + 1$, zato je $2S_m = m(m+1)$.

Definicija: neskončna vrsta

Za neskončno zaporedje (a_k) definiramo zaporedje delnih vsot $S_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$. Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira, če obstaja končna limita $\lim_{m\to\infty} S_m$; ta limita je njena vsota. Če take limite ni, vrsta divergira.

Ne seštevamo »neskončno členov naenkrat«: vsaka delna vsota je končna, šele nato obravnavamo limito zaporedja delnih vsot.

7.3 Štirje uvodni zgledi

1. Za $a_k = k$ je $S_m = m(m+1)/2$, kar raste brez meje. Vrsta divergira.
2. Za $a_k = (-1)^k$, $k \geq 1$, so delne vsote $-1, 0, -1, 0, \ldots$. Ker dve podzaporedji delnih vsot dajeta različni limiti, vrsta divergira.

3. Za $a_k = 1/k$ so delne vsote pozitivne in naraščajo. Vendar to samo še ne zagotavlja konvergence. Združimo člene v bloke:

$$S_{2^r} = 1 + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k}.$$

V j-tem bloku je 2^{j-1} členov; vsak je vsaj $1/2^j$. Vsak blok zato prispeva vsaj $1/2$ in $S_{2^r} \geq 1 + r/2$. Delne vsote niso omejene, zato harmonična vrsta divergira, čeprav $a_k \to 0$.

4. Za $a_k = 2^{-(k-1)}$ dobimo $S_m = 1 + 1/2 + \cdots + 2^{-(m-1)}$. Odštevanje $S_m/2$ od S_m da

$$\frac{S_m}{2} = 1 - 2^{-m}, \qquad S_m = 2(1 - 2^{-m}) \to 2.$$

Da $2^{-m} \to 0$, lahko uporabimo $2^m \geq m + 1$, dokazljivo z indukcijo, in nato neposredno izberemo m z $1/(m+1) < \varepsilon$.

Torej je limita členov in limita delnih vsot različna naloga. Konvergenca $a_k \to 0$ sama ne zadošča za konvergenco vrste.

Vprašanja za ponovitev

1. Zakaj pri produktu potrebujemo oceno za absolutno vrednost enega faktorja?
2. Kaj lahko dobimo pri oblikah $0/0$, $0 \cdot \infty$ in 1^∞?
3. Kdaj lahko zamenjamo $\lim f(a_n)$ z $f(\lim a_n)$?
4. Kako izberemo celoštevilski N, če izračun zahteva $n > T$?
5. Zakaj pri $1/\log_{10} n$ nastopi potenca števila 10, pri $1/\ln n$ pa eksponentna funkcija?
6. Kaj loči konvergenco zaporedja členov od konvergence vrste?