Funkcije več spremenljivk

Teden 7

Def: Funkcija n spremenljivk je predpis

$$f: D_f \to \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto y = f(x_1, \dots, x_n),$$

kjer je $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ definicijsko območje.

Primeri: Določi D_f:

- $f(x,y) = \sin x + \sin(y \cdot x)$
- $g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
- $h(x,y,z) = \ln(x-y) - z^2$

Graf funkcije f je

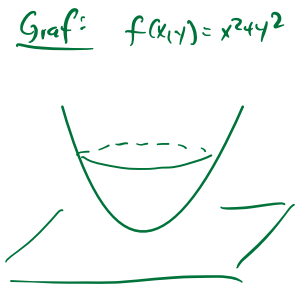
$$\Gamma_f = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1};\ (x_1, \dots, x_n) \in D_f\}.$$

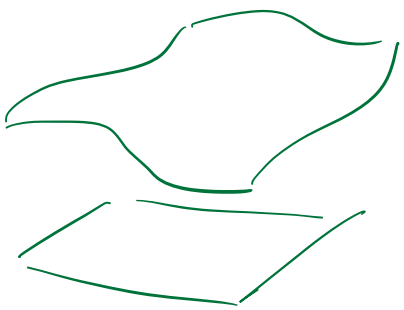
Nivojnica funkcije f pri $c \in \mathbb{R}$ je podana z enačbo $f = c$. (izohipse, izobare)

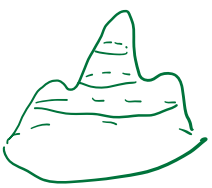
↖ krivulja, točka, ...

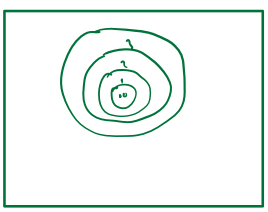
Vizualizacija funkcij za $n = 2$:

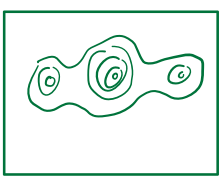
Graf: $f(x,y) = x^2 + y^2$











Meteorološki podatki: lokacija $\mapsto$ hitrost vetra, pritisk, temp., ...

Nivojnice v $\mathbb{R}^3$: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$



Ostali primeri: 2-D & 3-D slike (MRI). Jakost mobilnega signala.

Def: $f: D_f \to \mathbb{R}$. $L \in \mathbb{R}$ je *limita funkcije* v $a \in D_f \subset \mathbb{R}$, če

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : d(a,x) < \delta,\ x \neq a \Rightarrow d(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

(d: razdalja, zamenja abs-vrednost)

$$\left[L = \lim_{x \to a} f(x)\right]$$

Funkcija f je *zvezna* v a, če $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Primeri: Strategije za limite v $(0,0)$: → uporabimo polarne koordinate (r, φ)

→ postjemo $r \to 0$

→ limita mora biti neodvisna od φ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{2r\cos\varphi \sin\varphi}{r^2} = 2\cos\varphi\sin\varphi$$ ← ne obstaja, odvisna od smeri.

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{y}{x} = \tan\varphi$$ → ne obstaja

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{2r^2\cos^2\varphi \cdot r\sin\varphi}{r^2} = 0.$$

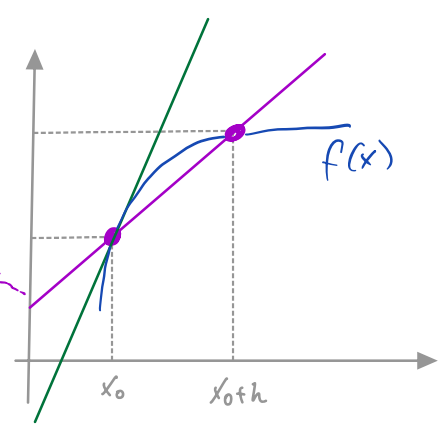
Dodaten problem pri več spremenljivkah: Limita mora biti neodvisna od smeri približevanja.

Odvod v 1 spr.

Def: $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ funkcija ene spr., $x_0 \in D_f$.

Diferenčni kvocient f v x_0:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



naklon sekante

Odvod funkcije f v točki a [$f'(a)$] je → naklon tangente

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Zvezna razsiritev funkcije z limito

f je *odvedljiva* v x_0, če $f'(x_0)$ obstaja.

Ne-odvedljiva v 0: $|x| = \sqrt{x^2}$

$\sqrt{x}$

f je odvedljiva, če je odvedljiva $\forall x \in D_f$.

Drugi odvod funkcije f: $f''(x_0) = (f')'(x_0)$

n-ti odvod funkcije: $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$. ← induktivna def

Funkcija je n-krat odvedljiva ($v\ x_0$), če n-ti odvod obstaja na D_f ($v\ x_0$).

Pomen: $f'(x_0)$ predstavlja

① Naklon tangente na f v x_0

② hitrost / spreminjanje f v x_0

$f''(x_0)$ predstavlja pospešek f (spreminjanje hitrosti). Pomen zaradi fizike, F=m*a

Primeri: Vožnja z avtom:

$s(t)$ ... prevožena razdalja ob času t

$s' = v$ ... hitrost

$s'' = a$ ... pospešek

Iz medijev:

Po prvi oceni se je BDP tako nominalno zvišal za 10,9 odstotka
napoved: višja inflacija, manjša rast BDP
gospodarska rast pada...
Zaradi hitrejšega naraščanja uvoza v primerjavi z izvozom

Podobno se izraža število uporabnikov (npr. spletnih storitev), veter, CO_2, omejitve hitrosti

Trditev: Če je f v x_0 odvedljiva, je tudi zvezna.

Def: Levi odvod f v x_0:

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Desni odvod f v x_0:

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h}$$

Primer: $|x|$

Pravila za računanje odvodov: Naj bosta f, g funkciji, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $(\alpha f + g)' = \alpha f' + g'$
- produktno pravilo: $(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$
- verižno pravilo: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- kvocientno pravilo: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

(↗ kjer so dobro definirani)

Osnovni odvodi: $(const)' = 0$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

$(\sin x)' = \cos x$ $\quad (\cos x)' = -\sin x$ $\quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(e^x)' = e^x$ $\quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Primeri: Po def. izračunaj:

- $(const')' = 0$
- $(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + n \cdot h \cdot x^{n-1} + \dots + h^n - x^n}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} n \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot h^2 x^{n-2} + \dots + h^n = n \cdot x^{n-1}$$

- $(\ln x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \ln\left(\frac{x+h}{h}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \to 0} \ln\left(1 + \frac{x}{h}\right)^{\frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x}} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{h}{x}}\right)^{\frac{h}{x}}}_{e} = \frac{1}{x}$$

- e^x: Trik z inverznimi funkcijami

$\ln e^x = x$

$\ln'(e^x) \cdot (e^x)' = 1$

$\frac{1}{e^x} \cdot (e^x)' = 1$

$(e^x)' = e^x$

Uporaba odvoda

① Računanje limit: L'Hospitalovo pravilo

f, g odvedljivi na (a,b), $g \neq 0$.

Naj za $c \in (a,b)$ velja eden izmed pogojev:

① $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$

② $\lim_{x \to c} f(x), \lim_{x \to c} g(x) \in \{\pm\infty\}$

Tedaj je $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Velja tudi za limite v neskončnosti, če $b = c = \infty$.

Primeri: Modrosti za računske zahtevnosti algoritmov, $n \geq 1$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{\ln x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} \overset{n \cdot L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{n!} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{n \cdot \ln n}{n} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \ln n + 1 = \infty$$

$\ln n \prec n \prec n^2 \prec \dots \prec e^n$

Quicksort: average $n \cdot \ln n$, worst case n^2

$n \ln n$ boljše kot n^2, slabše kot n