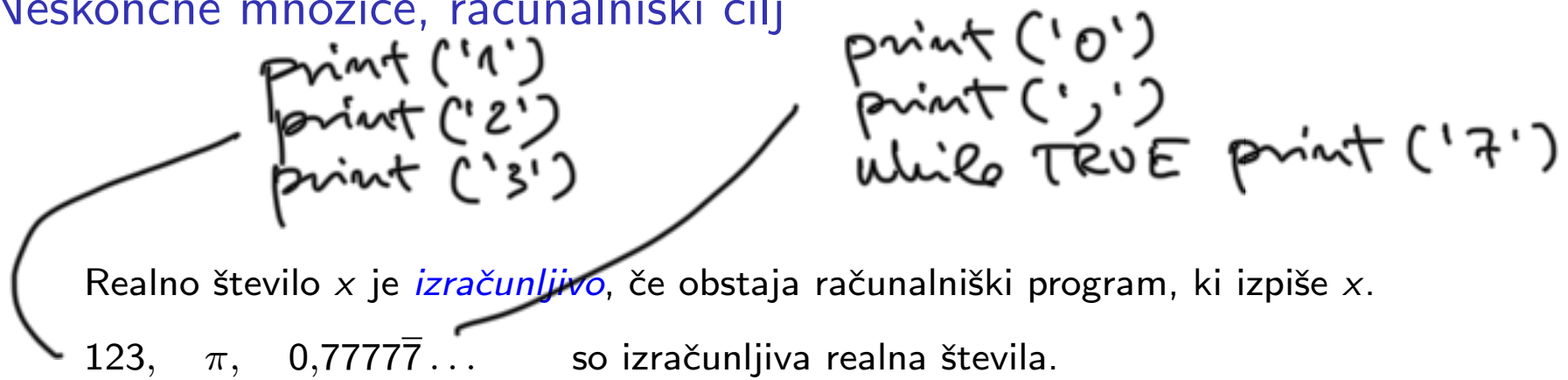
Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

23. november 2026

Neskončne množice, računalniški cilj



Realno število x je *izračunljivo*, če obstaja računalniški program, ki izpiše x.

$123, \quad \pi, \quad 0{,}7777\overline{7}\ldots$ so izračunljiva realna števila.
Vsako naravno število je izračunljivo.

Dopuščamo programe, ki se ne zaključijo (tj. se zaciklajo).
Kaj je računalniški program? Kaj pomeni izpisati x?

Realno število x je *neizračunljivo*, če ne obstaja računalniški program, ki izpiše x.

Izrek

Obstajajo neizračunljiva realna števila.

V resnici je *velika večina* realnih števil neizračunljivih.

Moč (neskončnih) množic

Pravimo, da sta množici A in B *enako močni*, $A \sim B$, če obstaja *bijektivna* preslikava iz A v B. Pišemo tudi $|A| = |B|$.

Pravimo, da je množica B *kvečjemu močnejša* od množice A, če obstaja *injektivna* preslikava iz A v B. Pišemo tudi $|A| \leq |B|$.

Oznaka $|A| < |B|$ pomeni $|A| \leq |B|$ in $|A| \neq |B|$
tj., obstaja injektivna preslikava iz A v B ter da ne obstaja bijektivna preslikava iz A v B.

Moč (neskončnih) množic

Bijekcija ni nujno potrebna:

Izrek (Cantor-Schröder-Bernstein)

$|A| = |B|$ *natanko tedaj, ko je* $|A| \leq |B|$ *in* $|B| \leq |A|$.

Vsaki dve množici sta primerljivi po moči:

Izrek (o trihotomiji)

Za poljubni množici A *in* B *velja natanko ena izmed možnosti* $|A| < |B|$, $|A| = |B|$ *ali* $|A| > |B|$.

Za $|A| = |B|$ je dovolj poiskati injektivni preslikavi $A \to B$ in $B \to A$. To je mogoče kot vajo bijekcijo.

Premisli za intervala $[-1,1]$ in $(-1,1)$

Števno neskončne množice

Množica A je *števno neskončna*, če je $|A| = |\mathbb{N}|$.
Množica B je *števna*, če je števno neskončna ali končna.
Množica C je *neštevna*, če ni števna.

Zgledi števno neskončnih množic.

1. $|\mathbb{N}|$, $|\mathbb{Z}|$, $|\mathbb{Q}|$,
   - množica sintaktično pravilnih *javanskih* programov,
   - množica izračunljivih realnih števil.

→ če A, B števni, potem je števna tudi R.
Pa N!

SINT
COMP

A ... množica izračunljivih R števil
B ... množica neizračunljivih R števil

Velja tudi

Trditev

Če sta množici A in B števni, je tudi $A \cup B$ števna množica.

(1) injekcij $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ sta kar vložitvi, injekcija $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ okrajšan ulomek $(-1)^s \frac{p}{q}$ slika v $2^s 3^p 5^q$.

(2+3) SINT → $\mathbb{N}$ standardno ASCII kode vseh znakov v naravno število

$\mathbb{N}$ → COMP glej prvo stran

COMP → SINT izračunljivo realno število x slikam v najkrajši in nato leksikografsko najmanjši javanski program, ki izpiše x

Kako do neštevnih množic?

Izrek

Za vsako množico A je $|A| < |\mathcal{P}A|$.

glej Cantorjeva diagonalna konstrukcija

Zgledi neštevnih množic.

1 2

- $\mathcal{P}\mathbb{N}$,
- $\mathbb{R}, (0,1), [0,1), [0,1]$,
  saj je $|[0,1]| = |\mathbb{R}| = |(-\pi/2, \pi/2)| = |(0,1)| = |\mathcal{P}\mathbb{N}|$,
- množica neizračunljivih realnih števil.

preterno v desetiškem zapisu

Vedno večje neskončnosti v zaporedju
$|\mathbb{N}|, \quad |\mathcal{P}\mathbb{N}|, \quad |\mathcal{P}\mathcal{P}\mathbb{N}|, \quad |\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathbb{N}|, \quad |\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathbb{N}|, \quad \ldots$

1+2

$x \longmapsto x$ $\qquad$ $x \longmapsto \frac{x}{\pi/2} + \frac{1}{2}$

$\to [0,1]$ $\qquad$ $\mathbb{R}$ $\qquad$ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\qquad$ $(0,1) \to \mathcal{P}\mathbb{N} \to$

$x \longmapsto \arctan x$

$x \in (0,1)$ zapišemo v binarnem zapisu

$x_{(2)} = 0{\cdot}110001110\ldots$

porodi

$\{0, 1, \quad 5, 6, 7, \ldots\}$

porodi podmnožica $\{2, 3, 4, 7, \ldots\}$

$0{\cdot}00111001\ldots$