Numerične metode (FRI), 1. kolokvij, 25. 11. 2026
Čas pisanja je 45 minut. Možno je doseči 30 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in list formata A4 z zapiski!

1	2	3	Σ

Ime in priimek

Vpisna številka

Naloga 1 [10 točk]

V premični piki želimo izračunati vrednost enostavne racionalne funkcije,

$$y = (x - p)/(x - q),$$

kjer so p, q, x dana predstavljiva števila. Opravite analizo zaokrožitvenih napak in preverite, da je izračun za y relativno direktno stabilen.
Nasvet: Pri izražanju zaokrožitvene napake si lahko pomagate z zvezo $1/(1 + s) \approx 1 - s$ za s blizu nič.

Rešitev. Vmesni koraki algoritma:

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathrm{fl}(x - p) = (x - p)(1 + \delta_1), \\ v_2 &= \mathrm{fl}(x - q) = (x - q)(1 + \delta_2), \\ v_3 &= \mathrm{fl}(v_1/v_2) = (v_1/v_2)(1 + \delta_3), \end{aligned}$$

kjer velja $|\delta_i| \leq u$ za $i = 1, 2, 3$.
Poenostavimo v_3:

$$\mathrm{fl}(y) = v_3 = \frac{(x - p)}{(x - q)} \frac{(1 + \delta_1)(1 + \delta_3)}{(1 + \delta_2)} \approx \frac{(x - p)}{(x - q)}(1 + \delta_1)(1 - \delta_2)(1 + \delta_3) = \frac{(x - p)}{(x - q)}(1 + \delta_4),$$

za novo definirani δ_4, za katerega velja $|\delta_4| \leq 3u$.
Relativna napaka:

$$\frac{|y - \mathrm{fl}(y)|}{|y|} = |\delta_4| \leq 3u.$$

Ker smo relativno napako omejili z večkratnikom u, je postopek relativno direktno stabilen.

Naloga 2 [10 točk]

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Preko LU razcepa z delnim pivotiranjem izračunajte rešitev linearnega sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Rešitev.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz $L\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{b}$ dobimo

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Iz $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ dobimo

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Naloga 3 [10 točk]

S pomočjo različnih metod bi radi določili ničlo funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$.

(a) Preverite, da ima funkcija f ničlo na intervalu $[-2, 2]$. S pomočjo tangentne metode in začetnim približkom $x_0 = 0$ izvedite dva koraka metode.

(b) Preverite, da je ničla funkcije f negibna točka iteracijske funkcije $g(x) = (-x^3 + 99x - 1)/100$. Pokažite, da iteracija $x_{r+1} = g(x_r)$, $r = 0, 1, \ldots$, konvergira k negibni točki funkcije g za vsak začetni približek $x_0 \in [-2, 2]$.

Rešitev.
(a) Določimo odvod, $f'(x) = 3x^2 + 1$. Za $x_{r+1} = x_r - f(x_r)/f'(x_r) = x_r - (x^3 + x + 1)/(3x^2 + 1)$ vstavimo zaporedne približke in dobimo $x_1 = -1$, $x_2 = -3/4$.
(b) Naj za x velja $x^3 + x + 1 = 0$. Potem

$$\begin{aligned} g(x) &= (-x^3 + 99x - 1)/100 \\ &= (-x^3 + 99x - 1 - (x + 1) + (x + 1))/100 \\ &= (-(x^3 + x + 1) + 99x - 1 + x + 1)/100 = (-0 + 100x)/100 = x. \end{aligned}$$

Za konvergenco moramo pogledati pogoj $|g'(x)| < 1$. Iz $g'(x) = (-3x^2 + 99)/100$ dobimo pogoj $-1 < (-3x^2 + 99)/100 < 1$ oz. $|x| < \sqrt{199/3} \approx 66$. Ničla α leži nekje v $[-2, 2]$, torej je zaradi intervalov oblike $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ dovolj pogledati interval $[-6, 6]$. Ker je interval $[-6, 6]$ vsebovan znotraj $[-66, 66]$, iteracija vedno konvergira.