Uporaba odvoda (nadaljevanje)

Teden 8

Nadaljujemo z uporabo odvoda: funkcije aproksimiramo s polinomi (Taylorjev polinom in vrsta), nato pa s prvim in drugim odvodom opišemo obliko grafa — naraščanje, ekstreme, konveksnost in prevoje.

Aproksimacija funkcij

Kako računati vrednosti funkcij zgolj z uporabo $+$ in $\cdot$?

Naj bo f funkcija na (a,b), odvedljiva po potrebi, in $x_0 \in (a,b)$.

- **Aproksimacija s konstanto:** $f \doteq f(x_0)$.
- **Aproksimacija z linearno funkcijo** (tangenta):

$$f(x) \doteq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)}_{T_1(x)}.$$

Velja

$$f(x_0) = T_1(x_0), \qquad f'(x_0) = T_1'(x_0).$$

Ideja: rimske številke $\rightsquigarrow$ decimalni zapis kot potenčna vrsta:

$$0.a_1a_2a_3\ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(\tfrac{1}{10}\right)^i.$$

Sedaj bi enako radi naredili za funkcije.

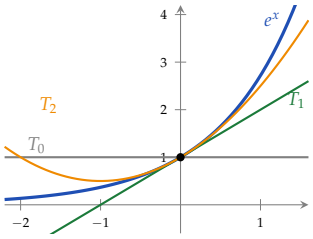
Prva smiselna aproksimacija: če se trenutno vozim s 100 km/h, kdaj bom prišel 100 km daleč?

- **Aproksimacija s kvadratno funkcijo** $T_2(x) = a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c$. Zahtevamo

$$\left.\begin{aligned} f(x_0) &= T_2(x_0) \\ f'(x_0) &= T_2'(x_0) \\ f''(x_0) &= T_2''(x_0) \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} c = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \\ a = \frac{f''(x_0)}{2} \end{cases}$$

(Pomožno: $T_2' = 2a(x-x_0) + b$, $T_2'' = 2a$.)

- **Aproksimacija s polinomom stopnje n.**



Slika 1: Aproksimacije funkcije e^x okoli $x_0 = 0$: s konstanto $T_0 = 1$, s tangento $T_1 = 1 + x$ in s parabolo $T_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Definicija (Taylorjev polinom stopnje n)

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k. \end{aligned}$$

Lastnost: $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ za vse $k \in \{0,1,\ldots,n\}$.

Kako dobra je aproksimacija? Opazujemo **ostanek**

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x).$$

Izrek

Naj bo f $(n+1)$-krat odvedljiva na (a,b). Tedaj je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1} \qquad \text{za nek } c \in [x_0, x].$$

Za $n = 0$ se imenuje izrek Lagrangeev izrek: $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$.

Definicija (Taylorjeva vrsta)

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k.$$

Če velja $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, potem je $f(x) = T(x)$.

Bonus: v notranjosti območja konvergence Taylorjeve vrste (dobljenega preko treh konvergenčnih kriterijev) lahko Taylorjevo vrsto **odvajamo in integriramo po členih**.

Primeri

Primer: eksponentna funkcija $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$. Razvoj okoli $x_0 = 0$: $f^{(n)}(0) = 1$, zato

$$T(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$T'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots = T(x).$$

Utemeljimo, da je $T(x) = f(x)$. Naj bo $x > 0$ in $c \in (0, x)$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-0)^{n+1} = \frac{e^c\, x^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{e^x\, x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

ker $\dfrac{x^n}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Torej

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{in} \qquad e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$\rightsquigarrow \quad \int e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,n!} + C.$$

Pokazali smo že, da vrsta za e^x konvergira na celem $\mathbb{R}$.

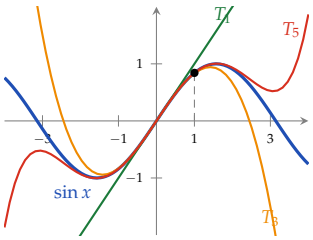
Da $x^n/n! \to 0$, nam L'Hôpitalovo pravilo ne pomaga — n je naravno število.

Integral $\int e^{x^2} dx$ **ni elementarna funkcija** — sedaj pa ga lahko integriramo po členih Taylorjeve vrste!

Primer: sinus, kosinus, geometrijska vrsta

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{za } x \in (-1,1) \qquad \textit{(geometrijska vrsta)}.$$



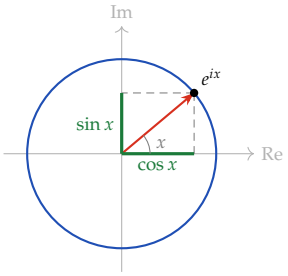
Slika 2: Taylorjevi polinomi funkcije $\sin x$ okoli 0. Višja stopnja $\Rightarrow$ dobra aproksimacija na večjem intervalu. Pri $x = 1$ (črna točka) se T_5 in sin praktično ujemata.

Sedaj lahko izražamo, računamo, odvajamo, ... veliko več kot le elementarne funkcije.

Primer: enako velja v $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$



Slika 3: Eulerjeva formula: e^{ix} leži na enotski krožnici v kompleksni ravnini, pod kotom x; realni del je $\cos x$, imaginarni $\sin x$.

Primer: približna vrednost Izračunaj približno $\sin 1$ z uporabo T_5 okoli $x_0 = 0$.

$$T(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

$$T_5(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = \frac{120 - 20 + 1}{5!} = \frac{101}{120}.$$

Kako natančno je to?

$$|R_5| = \left|\frac{\sin^{(6)}(c)}{6!}(1-0)^6\right| \le \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}.$$

Če želimo bolj natančno, vzamemo večji n.

V duhu ε–δ definicij: za vsako želeno natančnost ε obstaja dovolj velik n, ki nam to natančnost zagotavlja.

Zakaj so Taylorjeve vrste pomembne?

Računalnik — in tudi človek s svinčnikom — v resnici zna le **seštevati in množiti** (odštevanje in deljenje s številom sta njuni različici). Kaj lahko s tema dvema operacijama izračunamo iz števila x? Natanko vrednosti **polinomov** (racionalnim funkcijam se izognimo zaradi polov)

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = a_0 + x\big(a_1 + x\big(a_2 + \dots + x\, a_n\big)\big),$$

kjer desni, *Hornerjev* zapis porabi le n množenj in n seštevanj. Kako pa naj izračunamo $\sin 1$, $e^{0.3}$ ali $\ln 2$? Teh funkcij ne moremo zapisati s končno mnogo operacijami. **Taylorjeva vrsta je "neskončni polinom"**: funkcijo zapišemo kot polinom z neskončno členi, za izračun pa vrsto odrežemo pri T_n — in ostanek R_n nam natanko pove, koliko členov potrebujemo za želeno natančnost (kot pri $\sin 1 \approx \frac{101}{120}$ z napako največ $\frac{1}{720}$). Tako s seštevanjem in množenjem dosežemo neprimerno širši razred funkcij kot le polinome.

Podobno kot decimalni zapis: $0.a_1a_2a_3\ldots = \sum a_i 10^{-i}$ je "neskončni polinom" v $\frac{1}{10}$. Z njim lahko zapišemo tudi $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$ ali π, računamo jih z enostavnimi algoritmi pisnega seštevanja in množenja, z odrezom pa dobimo poljubno dober približek. Z rimskimi številkami (MCMLXXXIV) vse to gre veliko težje.

$\sin x$ samo s seštevanjem in množenjem

```
def sin_taylor(x, n=8):       # T_{2n-1}(x) okoli 0
    clen, vsota = x, x
    for k in range(1, n):     # nov clen iz prejsnjega
        clen = clen * (-x*x) * c[k]  # c[k]=1/(2k(2k+1))
        vsota = vsota + clen
    return vsota
```

Konstante $c[k]$ izračunamo vnaprej, zato v zanki res ostaneta le $+$ in $\cdot$. Sodobne knjižnice (npr. `math.h`) najprej zmanjšajo argument (npr. sin na $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$), nato pa uporabijo skrbno izbran polinom — ideja je ista.

Življenje pred računalniki: tablice. Ker je ročno seštevanje vrste dolgotrajno, so vrednosti funkcij izračunali *enkrat za vselej* in jih natisnili v **tablicah** logaritmov in kotnih funkcij. Logaritmi pretvorijo množenje v seštevanje, $\log(ab) = \log a + \log b$, zato so bile tablice več kot tristo let nepogrešljivo orodje astronomov, pomorščakov, geodetov, inženirjev in topničarjev. Vsaka napaka v tablici se je prenesla v vse izračune, ki so jo uporabljali — točnost tablic je bila zato izjemnega pomena. Prav želja po samodejnem in brezhibnem računanju tablic je Charlesa Babbagea vodila do zamisli o *diferenčnem stroju*, enem od predhodnikov računalnika: vrednosti polinomov je stroj računal samo s seštevanjem.

Jurij Vega. Med avtorji tablic je bil eden najslavnejših Slovenec **Jurij Vega** (rojen 1754 v Zagorici pri Dolskem, umrl 1802 pri Dunaju), matematik in topniški častnik. Leta 1783 je izdal tablice 7-mestnih logaritmov, ki so po točnosti prekašale vse dotedanje, leta 1794 pa v Leipzigu obsežni *Thesaurus logarithmorum completus* z 10-mestnimi logaritmi, namenjen predvsem astronomiji. Njegove tablice so se uporabljale še dolgo v 20. stoletje; izvod *Thesaurusa* je imel v lasti tudi Babbage. Leta 1789 je Vega izračunal π na 140 decimalk, od katerih je bilo prvih 126 pravilnih — svetovni rekord, ki je zdržal več desetletij.

Sporočilo: s seštevanjem in množenjem znamo izračunati le polinome. Taylorjeve vrste so "neskončni polinomi", s katerimi prek $+$ in $\cdot$ dosežemo e^x, $\sin x$, $\ln x$ in še mnogo več — nekoč ročno za tablice, danes v vsaki knjižnici matematičnih funkcij.

LOGARITHMI

N	$\log_{10}$
1000	000 0000
1001	000 4341
1002	000 8677
1003	001 3009
1004	001 7337
1005	002 1661
1006	002 5980
1007	003 0295

Slika 4: Kako je izgledala vrstica logaritemske tablice: mantise desetiških logaritmov na 7 decimalk ($\log_{10} 1001 = 3.000\,4341$). Vrednosti smo izračunali z računalnikom — včasih je bilo za vsako treba ročno sešteti vrsto.



Slika 5: Jurij Vega (1754–1802), slovenski matematik, avtor slavnih logaritemskih tablic.
Za π je Vega uporabil vrste za funkcijo arctan (Taylorjeva vrsta!) pri majhnih argumentih, kjer vrsta hitro konvergira.

Geometrijski pomen f'

Naj bo f funkcija in $x \in D_f$. Definirajmo **lokalne lastnosti** funkcije.

Definicija (lokalne lastnosti)

Če $\overbrace{\exists \varepsilon > 0 : \ \forall a, b \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)}^{\text{na neki okolici velja}}$ velja:

- $[a < b \Rightarrow f(a) < f(b)]$, je f v x **naraščajoča**;
- $[a < b \Rightarrow f(a) > f(b)]$, je f v x **padajoča**;
- $f(a) \leq f(x)$, ima f v x **lokalni maksimum**;
- $f(a) \geq f(x)$, ima f v x **lokalni minimum**.

Lokalni maksimumi in minimumi so **lokalni ekstremi**.

Naraščanje in padanje sta tu strogi verziji.
max f *in* min f *sta* globalna *ekstrema.*

Naj bo f odvedljiva. Tedaj:

1) $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ je v x naraščajoča;
2) $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ je v x padajoča;
3) $f'(x) = 0 \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} x$ je **stacionarna točka**. Če se v stacionarni točki x

a) predznak f' spremeni iz $-$ v $+$, je x lokalni **minimum**;

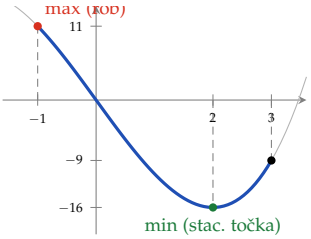
b) predznak f' spremeni iz $+$ v $-$, je x lokalni **maksimum**;

c) predznak f' ne spremeni, rečemo, da je x **sedlo**.

$f'(x)$	$+$	$-$	0
f	naraščajoča	padajoča	stacionarna točka
graf			

Trditev

Naj bo f zvezna in odvedljiva na $[a,b]$. Lokalni ekstremi f se lahko pojavijo **v stacionarnih točkah** ali **na robu intervala**.



Slika 6: Primer: poišči MAX in MIN funkcije $f(x) = x^3 - 12x$ na $[-1,3]$. $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$; na intervalu leži le $x = 2$. Primerjamo $f(-1) = 11$, $f(2) = -16$, $f(3) = -9$: $\max f = 11$ (na robu), $\min f = -16$ (v stacionarni točki).

Geometrijski pomen f''

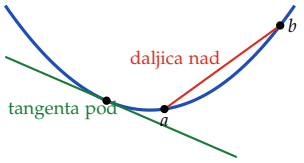
Naj bo f odvedljiva funkcija in $x \in D_f$.

Definicija (konveksnost in konkavnost)

Če $\overbrace{\exists \varepsilon > 0 : \ \forall a,b \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon),\ a<b}^{\text{na neki okolici velja}}$ velja:

- tangenta na graf f v x leži **pod** grafom f oziroma
- daljica med $(a,f(a))$ in $(b,f(b))$ leži **nad** grafom f,

je f v x **konveksna**. Če leži tangenta **nad** grafom (oz. daljica **pod** grafom), je f v x **konkavna**.



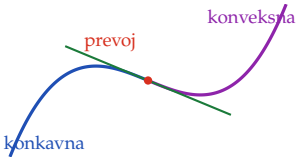
Slika 7: Konveksna funkcija: tangenta leži pod grafom, daljica med dvema točkama grafa pa nad njim. Pri konkavni funkciji je ravno obratno.

Naj bo f dvakrat odvedljiva. Tedaj:

1) $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ je v x konkavna;

2) $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ je v x konveksna;

3) $f''(x) = 0$ in predznak f'' se v x spremeni $\overset{\text{def}}{\Longrightarrow}$ x je **prevoj**.



Slika 8: V prevoju se konkavnost spremeni v konveksnost (ali obratno); tangenta tam seka graf.

$f''(x)$	$+$	$-$	0
f	konveksna	konkavna	(možen) prevoj
graf			

Trditev

Naj bo f dvakrat odvedljiva na (a,b), $x \in (a,b)$ in $f'(x) = 0$. Tedaj:

1) $f''(x) > 0 \Rightarrow x$ je lokalni **minimum**;

2) $f''(x) < 0 \Rightarrow x$ je lokalni **maksimum**;

3) $f''(x) = 0 \rightsquigarrow$ naj bo n prvo število, za katerega $f^{(n)}(x) \neq 0$. Tedaj:

   a) n liho $\Rightarrow$ v x ni lokalnega ekstrema, le sedlo;

b) n sodo, $f^{(n)}(x) > 0 \Rightarrow x$ je lokalni minimum;

c) n sodo, $f^{(n)}(x) < 0 \Rightarrow x$ je lokalni maksimum.

Za točko 3) potrebujemo seveda dovolj visoko odvedljivost.

Primeri: x^3, x^4, $-x^4$ v $x = 0$.

Primeri

Primer: risanje grafa Nariši graf funkcije $f(x) = x^2 e^{-x}$.

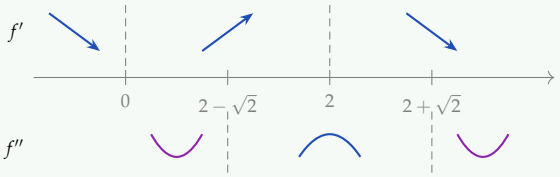
1) **Limiti:** $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (z L'Hôpitalom), $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

2) **Ničle:** $x = 0$.

3) f': $f'(x) = e^{-x}x(2-x) \;\to\; x_1 = 0,\ x_2 = 2$ (stacionarni točki).

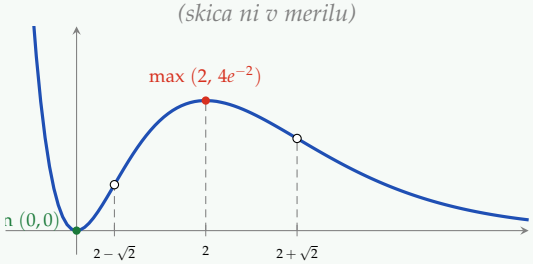
4) f'': $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \;\to\; x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{2}$ (prevoja).

Ker je $f''(0) = 2 > 0$, je v 0 lokalni minimum; ker je $f''(2) = -2e^{-2} < 0$, je v 2 lokalni maksimum.



Legenda: puščice — naraščanje/padanje (f'); ⌣ konveksna, ⌢ konkavna (f''); • min, • max, ○ prevoj.

(skica ni v merilu)



Primer: vitez in princesa Vitez po vodi vesla s hitrostjo 3 km/h, po kopnem hodi s 5 km/h. Kako lahko najhitreje pride do princese?

Minimiziramo čas $T(x)$, $x \in [0,5]$:

$$T(x) = \frac{\overbrace{\sqrt{1+x^2}}^{\text{razdalja po vodi}}}{3\,\text{km/h}} + \frac{\overbrace{(5-x)}^{\text{razdalja po kopnem}}}{5\,\text{km/h}} = \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2} + 1 - \frac{1}{5}x.$$

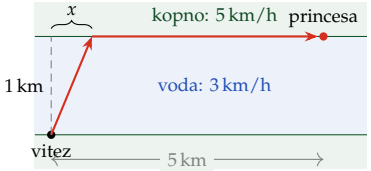
$$T'(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{5}.$$

Stacionarna točka: $T'(x) = 0$ in $x \geq 0$:

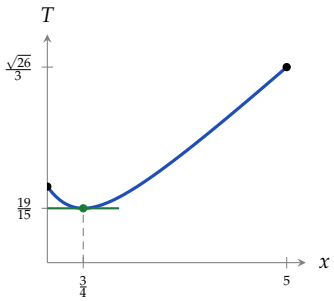
$$\tfrac{5}{3}x = \sqrt{1+x^2}\ \Big/^2 \;\Rightarrow\; \tfrac{25}{9}x^2 = 1 + x^2 \;\Rightarrow\; \tfrac{16}{9}x^2 = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{x_0 = \tfrac{3}{4}}.$$

Zakaj je to minimum? T je odvedljiva na $[0,5]$, poleg tega:

- *razlog 1:* $T''(x_0) > 0$ in x_0 je edina stacionarna točka;



Slika 9: Vitez vesla do točke na nasprotnem bregu, oddaljene za x, nato hodi po bregu do princese.



Slika 10: Čas $T(x)$ na $[0,5]$: minimum pri $x_0 = \frac{3}{4}$, kjer je tangenta vodoravna; oba robova dasta daljši čas.

- *razlog 2:* $T(x_0) < T(0), T(5)$:

$$T(0) = \tfrac{1}{3} + 1 = \tfrac{4}{3} = \tfrac{20}{15}, \qquad T(5) = \tfrac{1}{3}\sqrt{26} \approx 1.70,$$

$$T\left(\tfrac{3}{4}\right) = \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{25}{16}} + 1 - \tfrac{3}{20} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{5}{4} + 1 - \tfrac{3}{20}$$
$$= \tfrac{25+60-9}{60} = \tfrac{76}{60} = \tfrac{19}{15};$$

- *razlog 3:* $T'(0) < 0$ in $T'(5) > 0$:

$$T'(0) = -\tfrac{1}{5} < 0,$$

$$T'(5) = \tfrac{5}{3\sqrt{26}} - \tfrac{1}{5} = \tfrac{5}{\sqrt{9 \cdot 26}} - \tfrac{5}{\sqrt{25 \cdot 25}} > 0. \qquad \square$$