Nedoločeni integral

Teden 11

Odvajanje obrnemo: iščemo funkcijo, katere odvod poznamo. Spoznamo definicijo nedoločenega integrala, tabelo osnovnih integralov in pravila za računanje: linearnost, uvedbo nove spremenljivke, integracijo po delih (*per partes*), parcialne ulomke in integriranje Taylorjevih vrst po členih.

Definicija

Definicija (nedoločeni integral)

Naj bo $D \subset \mathbb{R}$. Funkcija $F\colon D \to \mathbb{R}$ je **nedoločeni integral** funkcije $f\colon D \to \mathbb{R}$, če

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{za vse } x \in D.$$

Oznaka: $F(x) = \int f(x)\,dx.$

Enoličnost. Nedoločeni integral je na vsakem intervalu $\subset D$ določen **do konstante natančno**. Razlog, če je $D = (a, b)$:

- $F'(x) = G'(x)\ \forall x \ \Rightarrow\ (F-G)'(x) = 0 \ \Rightarrow\ F(x) - G(x) = C \in \mathbb{R}$;
- $\big(F(x) + C\big)' = F'(x)$.

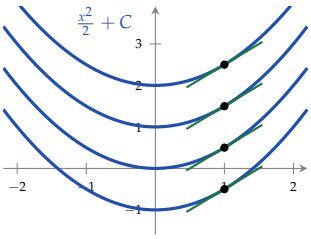
Primer

a) $\int 1\,dx = \{x,\ x+1,\ x+2,\ x+\pi,\ x-6\sqrt{2},\ \dots\} =$
$= x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

b) $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Tehnično bi bilo $\int x^{-1}dx = \begin{cases} \ln|x| + C, & x > 0, \\ \ln|x| + D, & x < 0, \end{cases} \quad C, D \in \mathbb{R},$
ker $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ni interval. Vseeno ohranimo zapis $\ln|x| + C$.

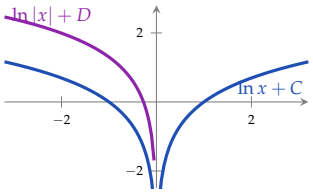
Nedoločenemu integralu rečemo tudi *primitivna funkcija* ali *antiodvod*.



Slika 1: Nedoločeni integral funkcije $f(x) = x$ je cela družina krivulj $\frac{x^2}{2} + C$, premaknjenih navpično. Pri istem x imajo vse enak naklon (zelene tangente), saj je odvod konstante 0.

Začetni pogoj C: če vem, kako hitro vozim, še ne vem, kako daleč od Pirana sem — potrebujem začetno oddaljenost.

Dva avta, ki vedno vozita z enako hitrostjo, bosta na konstantni razdalji.



Slika 2: Ker definicijsko območje $\ln|x|$ razpade na dva intervala, lahko vejo za $x < 0$ premaknemo neodvisno od veje za $x > 0$ — odvod je še vedno $\frac{1}{x}$.

Integrali elementarnih funkcij

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1, \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1, \end{cases}$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C, \qquad \int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{dx}{ax^2+b} = \frac{\arctan\left(\sqrt{a/b}\, x\right)}{\sqrt{ab}} + C.$$

(Pri zadnji formuli zahtevamo: $a, b > 0$)

Vsako vrstico tabele preverimo z **odvajanjem** desne strani. Npr. $(x \ln x - x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.

Pravila za računanje

Linearnost

$$\int (a \cdot f(x) + g(x))\, dx = a \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

Na koncu dodamo le en $+C$.

Primer $\int (3x+2)\, dx = \int 3x\, dx + \int 2\, dx = \frac{3x^2}{2} + 2x + C.$

Uvedba nove spremenljivke

Uvedba nove spremenljivke

$$\int f\big(u(x)\big)\, u'(x)\, dx = \int f(u)\, du, \qquad u = u(x), \quad du = u'(x)\, dx$$

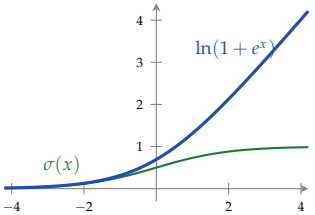
Izhaja iz verižnega pravila: če je $F' = f$, je $\big(F(u(x))\big)' = f(u(x))\, u'(x)$.

Primer

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\, dx \overset{\text{zamenjamo vse } x \text{ z } u}{=\!=\!=} \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+u}\, du = \frac{1}{2} \ln|1+u| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(1+e^{2x}\right) + C.$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= e^{2x} \\ du &= 2e^{2x}\, dx \end{aligned}}$$



Slika 3: Sigmoida $\sigma(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ (zeleno) in njen nedoločeni integral $\text{softplus}(x) = \ln(1+e^x)$ (modro).

Računalništvo: isti račun s $u = e^x$ da $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln(1+e^x) + C$. Funkcija $\sigma(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ je *sigmoida* (logistična funkcija), $\ln(1+e^x)$ pa *softplus* — obe sta priljubljeni aktivacijski funkciji v nevronskih mrežah.

Primer Izračun integrala na dva načina:

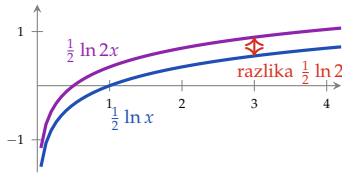
$$\int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|2x| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 2x \\ du &= 2\,dx \end{aligned}}$$

Ali sta rezultata različna? Ne: $\frac{1}{2}\ln|2x| = \frac{1}{2}\ln|x| + \underbrace{\frac{1}{2}\ln 2}_{\text{konstanta}}$.

Razlikujeta se le za konstanto, ki jo "pogoltne" C.



Slika 4: Oba rezultata se razlikujeta za konstanto $\frac{1}{2}\ln 2$ — sta dva člana iste družine.

Izhaja iz produktnega pravila za odvode: $(uv)' = u'v + uv'$; integriramo obe strani in prenesemo en člen na drugo stran.

Integracija po delih (per partes)

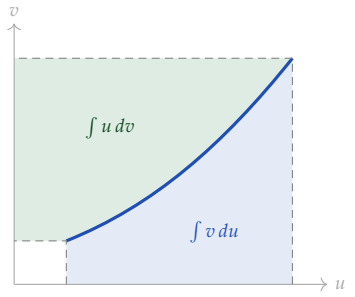
Per partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Primer

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x & dv &= \sin x\,dx \\ &\downarrow \text{ odv.} & &\downarrow \text{ int.} \\ du &= dx & v &= -\cos x \end{aligned}}$$



Slika 5: Ploščinski pomen formule per partes: obe ploščini skupaj tvorita razliko pravokotnikov, $\int u\,dv + \int v\,du = [uv]$.

Preverimo z odvajanjem: $(-x\cos x + \sin x)' = -\cos x + x\sin x + \cos x = x\sin x$. ✓

Parcialni ulomki

Razcep na parcialne ulomke

$$\frac{cx+d}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \qquad (a \neq b)$$

Primer

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax + A + Bx}{x(x+1)}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \; A = 1,\; B = -1.$$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x| - \ln|x+1| + C.$$

Primerjamo števca: $1 = (A+B)x + A$ mora veljati za vse x, zato se ujemata koeficienta pri x in prosta člena.

Integriranje Taylorjevih vrst

Na območju konvergence Taylorjeve vrste lahko funkcijo **odvajamo in integriramo členoma** (glej teden 8).

Primer

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\begin{aligned}\int \sin x\,dx &= \int \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \dots + C \\ &= 1 - \cos x + C.\end{aligned}$$

Ker je konstanta poljubna, je $1 - \cos x + C$ isto kot $-\cos x + C$ iz tabele.

Primer: Gaussova porazdelitev in funkcija napake **Gostota Gaussove (normalne) porazdelitve** je, do raznih konstant natančno, e^{-x^2}. Njen integral, **funkcija napake** (angl. *error function*)

$$\operatorname{erf}(x) \approx \int e^{-x^2} dx,$$

ni elementarna funkcija — lahko pa jo izrazimo z vrsto:

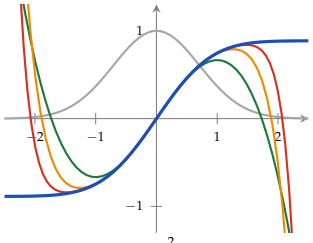
$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!},$$

$$\int e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{(-x^2)^n}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} + C.$$

Natančneje: gostota standardne normalne porazdelitve je $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, funkcija napake pa $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Računalništvo: simbolna integracija

Odvajanje je *mehanično*: z verižnim, produktnim in kvocientnim pravilom znamo odvajati vsako elementarno funkcijo, kar programi počnejo brez težav (in na tem temelji tudi avtomatsko odvajanje v knjižnicah za strojno učenje). Integriranje je **težje**: ni splošnega pravila za integral produkta ali kompozituma, uvedbo nove spremenljivke in per partes pa je treba "uganiti". Programi za simbolno računanje (*Mathematica*, *SymPy*, ...) zato uporabljajo kombinacijo hevristik in *Rischevega algoritma*, ki za elementarne funkcije odloči, ali je nedoločeni integral elementaren. Za $\int e^{-x^2} dx$ odgovori: ni — in takrat si pomagamo z vrstami ali numerično.



Slika 6: Funkcija e^{-x^2} (sivo) in njen integral $\int_0^x e^{-t^2} dt$ (modro), ki ni elementarna funkcija. Delne vsote vrste z 2, 4 in 6 členi (zeleno, oranžno, rdeče) se ji vedno bolje prilegajo.

Računalništvo: `math.erf` v Pythonu in podobne knjižnice računajo erf s polinomskimi (in racionalnimi) približki — z idejo iz tedna 8: samo $+$ in $\cdot$. Že 7 členov vrste da $\operatorname{erf}(1) \approx 0.8427$, pravilno na 4 decimalke.