Določeni integral

Teden 12

Določeni integral definiramo z Riemannovimi vsotami kot ploščino pod grafom. Osnovni izrek integralskega računa ga poveže z nedoločenim integralom, Newton–Leibnizova formula pa nam da praktičen način računanja. Na koncu računamo ploščine, prostornine, površine in dolžine krivulj.

Riemannova vsota in definicija

Ideja: radi bi računali **ploščino pod grafom** funkcije $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Izberemo $n \in \mathbb{N}$ in interval $[a,b]$ razdelimo na n delov širine

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Ploščino merimo v ploskovnih enotah: kvadrat s stranico 1 ima ploščino 1.

Definicija (Riemannova vsota)

Približek ploščine z uporabo pravokotnikov:

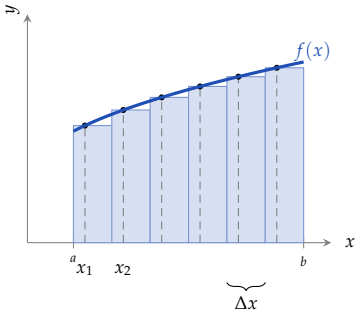
$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x, \qquad \text{kjer je } x_k \in \big[a+(k-1)\Delta x,\ a+k\,\Delta x\big].$$

Definicija (določeni integral)

Določeni integral funkcije f na $[a,b]$ je število

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} I_n \in \mathbb{R}.$$

- Če ta limita obstaja (torej je tudi neodvisna od izbire točk x_k), pravimo, da je f **integrabilna** na $[a,b]$.
- Vsaka zvezna funkcija je integrabilna.



Slika 1: Riemannova vsota: ploščino pod grafom nadomestimo z vsoto ploščin pravokotnikov širine Δx in višine $f(x_k)$.

Zapis je "modificirana" Riemannova vsota: $\sum \to \int$, $f(x_k) \to f(x)$, $\Delta x \to dx$.

Računalništvo — Monte Carlo: ker limita ne sme biti odvisna od izbire x_k, jih lahko izberemo kar *naključno*. Povprečje f v naključnih točkah, pomnoženo z $b-a$, je ocena integrala. Tako (v več dimenzijah) računajo osvetlitev v računalniški grafiki (*path tracing*).

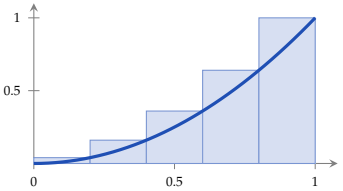
Primer Izračunajmo $\int_0^1 x^2\,dx$ po definiciji. Vzamemo $\Delta x = \frac{1}{n}$ in $x_k = \frac{k}{n}$ (desna krajišča):

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{k}{n}\Big)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\,n^3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{6},$$

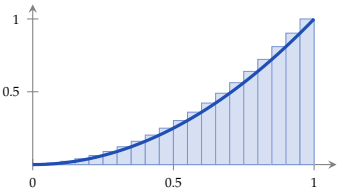
zato je $\int_0^1 x^2\,dx = \boxed{\frac{1}{3}}$.

Formulo $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ smo dokazali z **indukcijo** v 1. tednu.

$n = 5$: $I_5 = 0.44$



$n = 20$: $I_{20} \approx 0.359$



Slika 2: Riemannove vsote za $\int_0^1 x^2 dx$ z desnimi krajišči. Z naraščajočim n se približujejo vrednosti $\frac{1}{3} \approx 0.333$.

liha: $\int_{-a}^{a} f = 0$

Lastnosti določenega integrala

a) **Linearnost:** $\displaystyle\int_a^b \big(\alpha f(x) + g(x)\big)dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Dogovor: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

b) $\int_a^b |f(x)|\,dx \;\geq\; \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$.

c) **Aditivnost:** $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\ \forall c \in [a,b]$.

d) **Pozitivnost:** $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b] \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

e) **Monotonost:** $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b] \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

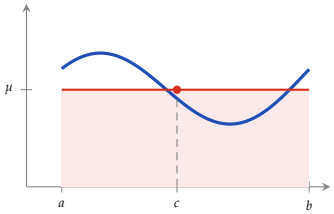
f) **Sodost in lihost:** f liha $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$; f soda $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

g) **Ocena:** $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x),\ M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \;\Rightarrow$ $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

h) **Povprečna vrednost** f na $[a,b]$:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

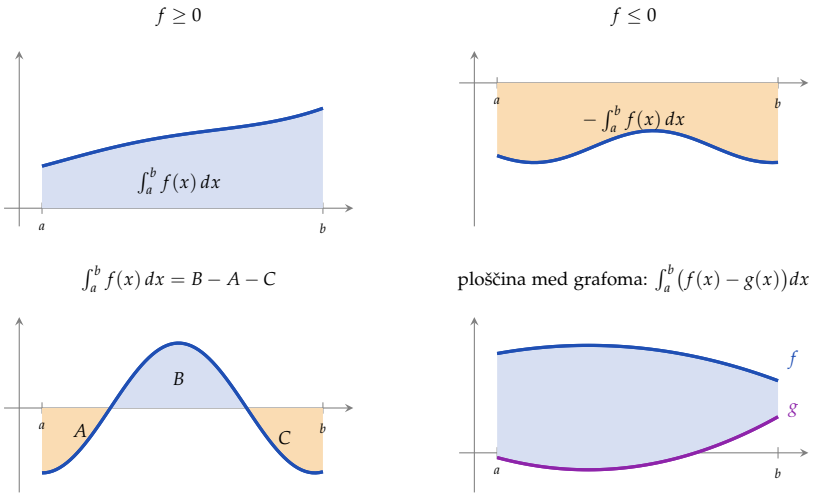
Če je f zvezna, potem $\exists\, c \in [a,b]\colon f(c) = \mu$.



Slika 4: Povprečna vrednost: pravokotnik višine μ nad $[a,b]$ ima enako ploščino kot območje pod grafom. Zvezna f vrednost μ v neki točki c tudi doseže.

Geometrijski pomen: predznačene ploščine

Določeni integral meri **predznačeno ploščino**: ploščina nad osjo x šteje pozitivno, pod osjo pa negativno.



Slika 5: Predznačene ploščine. Modro: ploščina šteje pozitivno, oranžno: negativno. Spodaj desno je $f \geq g$, zato je integral razlike enak ploščini med grafoma (tudi če g zaide pod os x).

Osnovni izrek in Newton–Leibnizova formula

Izrek (osnovni izrek integralskega računa)

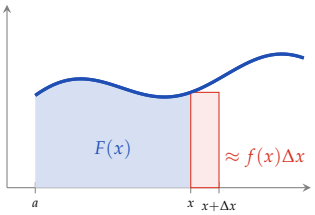
Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj je

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

odvedljiva in $F'(x) = f(x)$ za vse $x \in [a,b]$.

Torej je F **nedoločeni integral** funkcije f — izrek poveže "obratni odvod" in Riemannove vsote.

Razlog: $F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \approx f(x)\,\Delta x$, zato $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \to f(x)$.



Slika 6: $F(x)$ je ploščina od a do x. Ko x povečamo za Δx, se ploščina poveča za približno $f(x)\,\Delta x$ — torej je $F' = f$.

Newton–Leibnizova formula

Naj bo $G(x)$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$. Tedaj

$$\int_c^d f(x)\,dx = G(d) - G(c) \;=\; G(x)\Big|_c^d.$$

- Velja za *vsak* nedoločeni integral ($+C$ se odštejeta).
- **Dokaz** (z uporabo osnovnega izreka):

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx = F(d) - F(c). \qquad \square$$

- Poda uporabno formulo za računanje določenih integralov.

Interpretacija Newton–Leibnizove formule

Naj bo $v(t)$ hitrost avta ob času t (v urah). Kaj predstavlja

$$v(0)\cdot\tfrac{1}{2} + v(\tfrac{1}{2})\cdot\tfrac{1}{2} + v(1)\cdot\tfrac{1}{2} + v(\tfrac{3}{2})\cdot\tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\big(v(0) + v(\tfrac{1}{2}) + v(1) + v(\tfrac{3}{2})\big)\,?$$

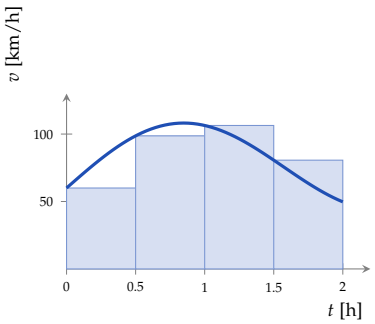
Kaj pa

$$v(0)\cdot\tfrac{1}{60} + v(\tfrac{1}{60})\cdot\tfrac{1}{60} + v(\tfrac{2}{60})\cdot\tfrac{1}{60} + \cdots + v(\tfrac{119}{60})\cdot\tfrac{1}{60}\,?$$

To so vedno boljši približki za **prevoženo pot** v času $t \in [0,2]$; v limiti $n \to \infty$:

$$s = \int_a^b \underbrace{v(t)}_{\text{hitrost}}\ \underbrace{dt}_{\substack{\text{majhna}\\ \text{sprememba časa}}}$$

$v(t)\,dt$ … majhna sprememba poti,
$\int$ … "neskončna" vsota,
s … kumulativna sprememba.



Slika 7: Pot iz hitrosti: vsak pravokotnik je "hitrost × čas" na polurnem intervalu. Vsota je približek prevožene poti, ki se izboljšuje z manjšimi koraki.

Računalništvo: če je $r(t)$ hitrost prenosa v MB/s, je $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$ količina prenesenih podatkov v MB. Graf hitrosti v upravitelju prenosov je $r(t)$, napredek prenosa pa njegov integral.

Podobne interpretacije:

- prenos podatkov iz trenutne hitrosti prenosa;
- število okuženih iz števila novo okuženih na časovno enoto.

Računanje v praksi

Recept: nedoločeni integral + Newton–Leibnizova formula.

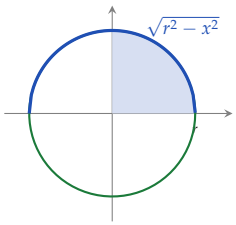
Primer $\displaystyle\int_1^2 (2x+3)\,dx = \left(x^2+3x\right)\Big|_1^2 = (2^2+3\cdot 2)-(1^2+3\cdot 1) = 10-4=6.$

Primer: ploščina kroga

$$\begin{aligned}
2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx &= 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx \\
&= 4\int_{x=0}^{x=r}\sqrt{r^2(1-\cos^2 u)}\,dx \\
&= -4\int_{x=0}^{x=r} r\sin u\cdot r\sin u\,du \\
&= -4r^2\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 u\,du \\
&= 4r^2\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 u)\,du \\
&= 4r^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2u\right)du \\
&= 4r^2\left(\frac{u}{2}-\frac{\sin 2u}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 4r^2\cdot\frac{\pi}{4} = \boxed{\pi r^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= r\cos u, & x=0 &\leftrightarrow u=\tfrac{\pi}{2},\\ dx &= -r\sin u\,du, & x=r &\leftrightarrow u=0 \end{aligned}$$

$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(\cos 2\varphi+1)$



Slika 8: Krog s polmerom r: zgornja polkrožnica je graf $\sqrt{r^2-x^2}$. Ploščina kroga je $4\times$ osenčena četrtina.

Pozor: pri uvedbi nove spremenljivke v določenem integralu spremenimo tudi meje — ali pa se na koncu vrnemo k x.

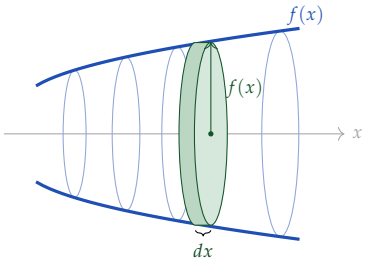
Uporaba: prostornine, površine, dolžine

Prostornina vrtenine

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

Površina vrtenine (brez osnovnih ploskev)

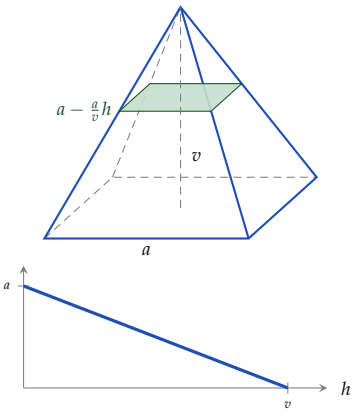
$$P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$



Slika 9: Vrtenina nastane z vrtenjem grafa f okoli osi x. Razrežemo jo na tanke valje (zeleno) s polmerom $f(x)$ in debelino dx, prostornine $\pi f(x)^2\,dx$, in jih "seštejemo".

Primer: prostornina piramide Piramida s kvadratno osnovno ploskvijo s stranico a in višino v: na višini h je presek kvadrat s stranico $a - \frac{a}{v}h$, rezina debeline dh ima prostornino $\left(a - \frac{a}{v}h\right)^2 dh$:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^v \left(a - \frac{a}{v}h\right)^2 dh = a^2 \int_0^v \left(1 - \frac{h}{v}\right)^2 dh \\ &= a^2 \int_0^v \left(1 - \frac{2h}{v} + \frac{h^2}{v^2}\right) dh = a^2 \left(h - \frac{h^2}{v} + \frac{h^3}{3v^2}\right)\Big|_0^v \\ &= a^2 \left(v - v + \frac{v}{3}\right) = \boxed{\frac{a^2 v}{3}}. \end{aligned}$$



Slika 10: Piramida: presek na višini h je kvadrat, katerega stranica linearno pada od a (pri $h = 0$) do 0 (pri $h = v$).

Dolžina krivulje

Naj bo $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ parametrično podana krivulja.

Dolžina krivulje

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

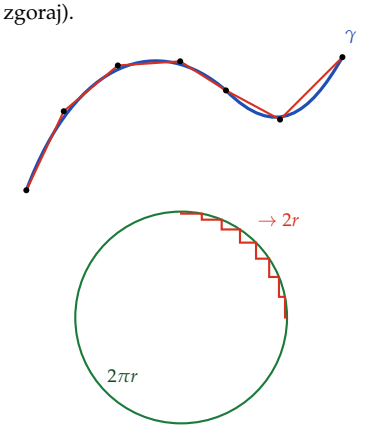
V primeru funkcije f je graf parametriziran kot $(t, f(t))$, zato

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

Primer: krožnica $\gamma(t) = r(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$\ell = \int_0^{2\pi} r\sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r.$$

Pomen: $\|\gamma'(t)\|$ je hitrost, s katero prepotujemo krivuljo; integral hitrosti po času je prepotovana pot (kot pri avtu zgoraj).



Slika 11: Zgoraj: dolžino krivulje aproksimiramo z dolžino lomljenke (rdeče) — v limiti dobimo $\int \|\gamma'\| dt$. Spodaj: "stopničasta" aproksimacija je dobra za *ploščino*, **ni pa** za *obseg*: dolžina stopnic na četrtini krožnice je vedno $2r$, ne glede na finost, prava dolžina pa je $\frac{\pi}{2}r$.

Računalništvo: krivulje v računalniški grafiki (Bézierjeve krivulje v pisavah, SVG, CAD) so parametrične. Integral za njihovo dolžino običajno ni elementaren, zato ga programi računajo numerično — npr. z vsoto dolžin kratkih daljic, kot na sliki.