# *Posplošeni in večkratni integral*

## *Teden 13*

Določeni integral razširimo v dve smeri: na **posplošene integrale** (neomejene funkcije in neomejena območja), ki jih definiramo z limito, in na **dvojne integrale** po območjih v ravnini, ki jih v praksi računamo kot dvakratne.

# Posplošeni integrali

Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ smo definirali le za **omejene** funkcije $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ na **omejenih** intervalih. Obe omejitvi odpravimo z limito.

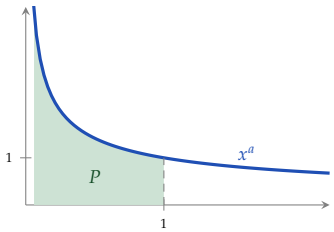
### *Neomejene funkcije: integriranje preko polov*

Naj bo $f\colon [\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ zvezna in $\lim\limits_{x\nearrow\beta} f(x) = \pm\infty$ *(pol v $\beta$)*.

**Definicija (integral preko pola)**

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx := \lim_{t\nearrow\beta} \int_\alpha^t f(x)\,dx$$

*(podobno za pol v $\alpha$)*. Če limita obstaja (je končna), pravimo, da integral **konvergira**.




Slika 1: Ploščina $P$ pod $x^a$ na $(0,1]$ je končna natanko za $a > -1$ (tu $a = -\frac{1}{2}$, $P = 2$), čeprav je funkcija pri 0 neomejena.

**Primer** $\int_0^1 x^a\,dx = \lim\limits_{t\searrow 0} \int_t^1 x^a\,dx.$

- $a = -1$: $\lim\limits_{t\searrow 0} \ln x\Big|_t^1 = 0 - \lim\limits_{t\searrow 0} \ln t = \infty.$
- $a \neq -1$:

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{x^{a+1}}{a+1}\Big|_t^1 = \frac{1}{a+1} - \lim_{t\searrow 0} \frac{t^{a+1}}{a+1}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{a+1} - 0 = \dfrac{1}{a+1}, & a > -1, \\ \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{\infty}{\underbrace{a+1}_{<0}} = \infty, & a < -1. \end{cases}$$

$$\boxed{\int_0^1 x^a\,dx < \infty \iff a > -1}$$

Če je pol *v notranjosti* intervala: naj bo $c \in [\alpha,\beta]$ in $f\colon [\alpha,\beta] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ zvezna.

**Definicija (pol v notranjosti)**

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{t\nearrow c} \int_\alpha^t f(x)\,dx + \lim_{s\searrow c} \int_s^\beta f(x)\,dx.$$

Integral konvergira, če konvergirata **obe** limiti.

**Primer**

a) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\searrow 0}\big(x\ln x - x\big)\Big|_t^1 = -1 - \lim_{t\searrow 0}\big(t\ln t - t\big) = -1.$

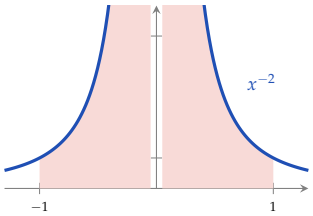
b) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{-2}\,dx = \lim_{t\nearrow 0}\int_{-1}^t \frac{dx}{x^2} + \lim_{s\searrow 0}\int_s^1 \frac{dx}{x^2} = \infty + \infty = \infty.$

*Pri a)* uporabimo $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$ (tabela, teden 11) in $\lim_{t\searrow 0} t\ln t = 0$ (L'Hôpital).

**Izrek**

Naj bo $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ zvezna, $c \in [\alpha,\beta]$ in $f(x) \neq 0$ za vsak $x$. Tedaj

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(x)}{|x-c|^a}\,dx \text{ obstaja} \iff a < 1.$$




Slika 2: **Pozor:** "naivna" Newton–Leibnizova formula da $\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^1 = -2 < 0$, kar je nemogoče za pozitivno funkcijo. Ker ima $x^{-2}$ pol v 0, formule ne smemo uporabiti — integral je $\infty$. Blizu $c$ se integrand obnaša kot $\frac{f(c)}{|x-c|^a}$, zato odloča le eksponent — kot v zgornjem primeru $\int_0^1 x^{-a}dx$.

## *Integral po neomejenem območju*

Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna in $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Definicija (integral po neomejenem intervalu)**

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_\alpha^t f(x)\,dx.$$

Podobno za $\displaystyle\int_{-\infty}^\alpha f(x)\,dx$, in

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\infty f(x)\,dx.$$

**Primer** $\displaystyle\int_1^\infty x^a\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^a\,dx.$

- $a = -1$: $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\ln x\Big|_1^t = \infty.$
- $a \neq -1$:

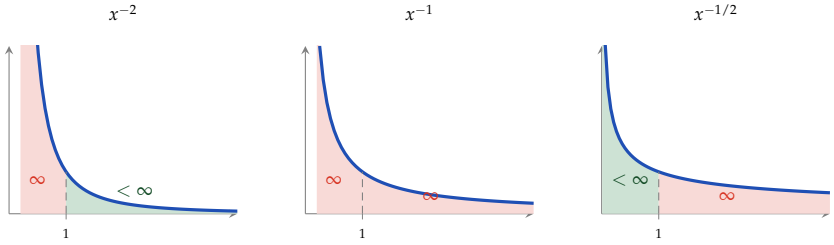
$$\lim_{t\to\infty}\frac{x^{a+1}}{a+1}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty}\frac{t^{a+1}}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \begin{cases}\infty, & a > -1,\\ -\dfrac{1}{a+1} > 0, & a < -1.\end{cases}$$

$$\boxed{\int_1^\infty x^a\,dx < \infty \iff a < -1}$$

**Računalništvo:** isti račun pove, kako hitro rastejo vsote: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$ (harmonična vrsta divergira), vsota $\sum \frac{1}{k^2}$ pa konvergira. Povprečni čas algoritma *quicksort* je $\approx 2n\ln n$ primerjav ravno zaradi harmoničnih števil.

**Opazka.** $\displaystyle\int_0^\infty x^{-1}\,dx$ ne konvergira niti pri 0, niti pri $\infty$.

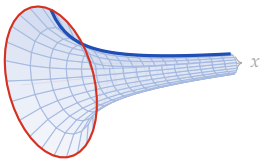
- $x^a$ za $a > -1$ lahko integriramo preko pola 0;
- $x^a$ za $a < -1$ lahko integriramo do $\infty$.




Slika 3: Zeleno: končna ploščina, rdeče: neskončna. Na $(0,1]$ odloča, ali je $a > -1$, na $[1,\infty)$ pa, ali je $a < -1$. Pri $x^{-1}$ ne gre ne eno ne drugo.

**Primer: Gabrijelov rog** Zavrtimo $f(x) = x^{-1}$ okoli osi $x$ na $[1,\infty)$. Vrtenina (Gabrijelov rog) ima

- **končno prostornino:** $V = \pi \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^\infty = \pi$;
- a **neskončno površino:** $P = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx \geq 2\pi \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$.




Slika 4: Gabrijelov rog: vrtenina grafa $\frac{1}{x}$ za $x \geq 1$.

*"Paradoks pleskarja":* rog lahko napolnimo s končno količino barve, ne moremo pa ga pobarvati.

## Dvojni integral

*Ideja:* integriramo po območju v ravnini (*"prostornina hriba"*). Naj bo $K \subset \mathbb{R}^2$ omejeno območje in $f\colon K \to \mathbb{R}$ zvezna in omejena. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo **Riemannovo vsoto** $S_n$:

- Ravnino razdelimo na kvadratno mrežo $M_n$, katere kvadratki so dimenzij $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$:

$$M_n = \Big\{ \underbrace{\left[\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}\right] \times \left[\tfrac{l}{n}, \tfrac{l+1}{n}\right]}_{C_{k,l}} ;\ k,l \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

- Riemannova vsota:

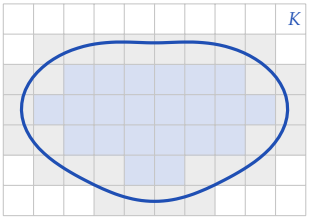
$$S_n = \sum_{C_{k,l} \subset K} f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right) \cdot \underbrace{\text{ploščina } C_{k,l}}_{(1/n)^2}.$$

*Lahko bi vzeli katerokoli točko v $C_{k,l}$.* Vsoto $S_n'$, kjer seštejemo po vseh $C_{k,l}$ s $C_{k,l} \cap K \neq \emptyset$, ima isto limito: $\lim S_n' = \lim S_n$.

**Definicija (dvojni integral)**

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

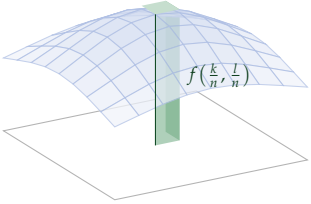
Limita je neodvisna od omenjenih izbir.




Slika 5: Mreža $M_n$ in območje $K$. Modri kvadratki $C_{k,l} \subset K$ sestavljajo vsoto $S_n$; sivi sekajo rob in so vključeni v $S_n'$. Ko se mreža drobi, razlika izgine.

*Integriranje v praksi.*

- $K$ parametriziramo z $x$ in $y$;
- dvojni integral $\rightsquigarrow$ **dvakratni** integral;
- vrstni red integriranja ni pomemben (**Fubinijev izrek**).




Slika 6: "Prostornina hriba": vsak člen $f(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}) \cdot \frac{1}{n^2}$ je prostornina tankega stolpca nad kvadratkom $C_{k,l}$.

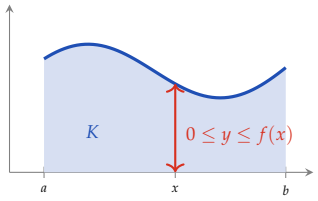
**Primer**

$$\iint_{[0,1]^2} x^2\,dx\,dy = \int_0^1 \underbrace{\int_0^1 x^2\,dy}_{=x^2}\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \boxed{\tfrac{1}{3}}.$$

Pri notranjem integralu po $y$ je $x$ konstanta. Rezultat je enak kot $\int_0^1 x^2 dx$ iz tedna 12: "hrib" nad $[0,1]^2$ ima povsod enak prerez.

**Primer: ploščina pod grafom $f$** Za $K = \{(x,y)\colon a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$:

$$\iint_K dx\,dy = \int_a^b \int_0^{f(x)} dy\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$




Slika 7: Pri fiksnem $x$ teče $y$ od 0 do $f(x)$ (rdeče), nato $x$ od $a$ do $b$.

**Opazka.**

$$\text{ploščina } K = \iint_K \underbrace{dx\,dy}_{\substack{\text{ploščine majhnih}\\ \text{kvadratkov v } K}}$$

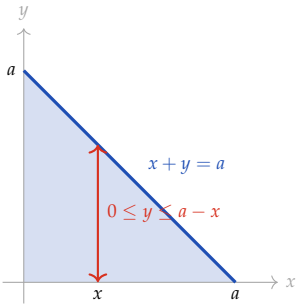
— integral je "vsota" ploščin majhnih kvadratkov v $K$.

**Primer: ploščina trikotnika** $K = \{(x,y)\colon x,y \ge 0,\ x+y \le a\}$:

$$\iint_K dx\,dy = \int_0^a \int_0^{a-x} dy\,dx = \int_0^a (a-x)\,dx$$

$$= \left(ax - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^a = a^2 - \frac{a^2}{2} = \boxed{\frac{a^2}{2}}$$

*— ploščina trikotnika.*




Slika 8: Trikotnik $K$: pri fiksnem $x$ teče $y$ od 0 do $a-x$.

**Primer: dodatni: prostornina pod ploskvijo** Na istem trikotniku izračunajmo $\iint_K (x+y)\,dx\,dy$:

$$\int_0^a \int_0^{a-x} (x+y)\,dy\,dx = \int_0^a \left(x(a-x) + \frac{(a-x)^2}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^a \frac{a^2-x^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \boxed{\frac{a^3}{3}}.$$

*Fubini:* če najprej integriramo po $x$ (od 0 do $a-y$), nato po $y$, dobimo isti rezultat — preverite!