1. Prepričaj se, da sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -4 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

podobni. Poišči matriko P, da bo $B = P^{-1}AP$?

Rešitev: A in B sta podobni, ker sta obe podobni $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Primer za $P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Ali je matrika

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

podobna diagonalni matriki? Zakaj (ne)?

Rešitev: Ne, pri (dvakratni) lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = 2$ je dimenzija lastnega podprostora $1 = \dim(N(A - 2I))$, tj. algebraična večkratnost ene od lastnih vrednosti ni enaka njeni geometrični večkratnosti.

3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.

(b) Če obstaja, poišči matriko P, da bo $P^{-1}AP$ diagonalna matrika.

(c) Izračunaj A^{1000}.

Rešitev: (a) $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 1$. (b) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (c) $A^{1000} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Zaporedji a_n in b_n sta dani rekurzivno s formulama

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{aligned}$$

in z začetnima členoma $a_1 = 0$ in $b_1 = 1$. Poišči eksplicitni formuli za splošna člena zaporedij a_n in b_n.

5. Zaporedje je podano rekurzivno s formulo

$$a_n = -2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

in začetnima členoma $a_0 = 0$ in $a_1 = 1$. Določi eksplicitno formulo za a_n.
Lahko se držiš teh namigov:

   (a) Rekurzivno formulo najprej napiši v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

   za vektor $[a_n, b_n]^\mathsf{T}$, kjer je $b_n = a_{n-1}$.

   (b) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.

   (c) Začetni vektor $\mathbf{x}_1 = [a_1, b_1]^\mathsf{T} = [1, 0]^\mathsf{T}$ izrazi v bazi iz lastnih vektorjev matrike A in poišči splošno formulo za a_n.

6. Naj bo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ poljuben neničeln vektor in $H = I - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{T}$.

   (a) Preveri, da je $\mathbf{x}$ lastni vektor matrike H. Kateri lastni vrednosti pripada?

   (b) Poišči/opiši lastne podprostore za ostale lastne vrednosti matrike H.

   (c) Kaj mora dodatno veljati za $\mathbf{x}$, da bo H matrika zrcaljenja?

Rešitev: (a) $H\mathbf{x} = (I - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{T})\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = (1 - 2\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x})\mathbf{x}$, tj. $\mathbf{x}$ pripada lastna vrednost $1 - 2\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}$. (c) $\|\mathbf{x}\| = 1$.

7. Na nanospletu so štiri (!) spletne strani. (Vrstično–stohastična) matrika

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

podaja prehodne verjetnosti: Na mestu (i, j) v matriki P je verjetnost p_{ij}, da uporabnik, ki se trenutno nahaja na strani z indeksom i klikne na povezavo na stran z indeksom j.
Pokaži, da ima matrika P (in zato tudi matrika P^T) vsaj eno lastno vrednost, ki je enaka 1. Nato poišči tisti lastni vektor $\mathbf{v}$ matrike P^T za lastno vrednost 1, ki ima vsoto komponent enako 1. (Temu lastnemu vektorju pravimo *invariantna porazdelitev* pripadajoče markovske verige.)