Linearna algebra **Teden 7**

Linearne preslikave

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- Kot napovednik, kaj nas čaka v tem tednu, vam ne bi mogla dati boljše predstavitve, kot je 3Blue1Brown, Essence of linear algebra, Linear transformations and matrices.
- Naša motivacija in uvod v linearne preslikave, video.
- Na Wolframovi strani Wolfram Demonstrations, Reindeer Linear Transformation si oglejte demonstracijo linearne preslikave. Izberite elemente željene 2×2 matrike. Potem poglejte, kam se točke ravnine preslikajo z linearno preslikavo, ki ustreza množenju z vašo izbrano matriko.
- Definicija *linearne preslikave*, video.
  - ↯ Naloga 1: Za linearno preslikavo $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ naj velja $\tau(\vec{a}) = \vec{b}$, $\tau(\vec{b}) = \vec{c}$ ter $\tau(\vec{c}) = \vec{b} + \vec{c}$ za neke vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Določite $\tau(\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c})$.
  - Najpomembnejši primer linearne preslikave, množenje vektorja z matriko, video.
    Iz tega primera sledi, da če za preslikavo $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ obstaja matrika $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, da je
    $$\tau(\vec{v}) = A\vec{v}$$
    za vsak $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, potem je τ linearna preslikava. Po domače: za preslikavo τ smo našli matriko A, tako da se vsak vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ preslika v produkt matrike A z vektorjem $\vec{v}$, torej v $A\vec{v} \in \mathbb{R}^m$.
  - Primer linearne preslikave: projekcija v $\mathbb{R}^2$, video.
  - Primer linearne preslikave, zrcaljenje v $\mathbb{R}^2$, video.
  - Seveda pa niso vse preslikave linearne. Oglejte si primer nelinearne preslikave, video.
  - Zelo dobro poznate primer linearne preslikave na vektorskem prostoru funkcij, kot je denimo odvod, video.

- ↯ Naloga 2: V računalništvu boste večkrat uporabili naslednjo preslikavo, ki vam iz matrike naredi vektor, tako, da zgolj preuredi njene elemente. Za matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ označimo *vektorizacijo matrike A* kot

$$\mathrm{vec}(A) = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn},$$

  kjer z $A^{(i)}$ označimo i-ti stolpec matrike A. Tako definirana preslikava vec je preslikava iz $\mathbb{R}^{m\times n}$ v $\mathbb{R}^{mn}$, video.
  Pokažite, da je vec linearna preslikava.

- Lastnosti linearne preslikave, video.
- Ne le, da je množenje vektorja (z leve) z matriko linearna preslikava. Velja tudi obratno, da lahko vsaki linearni preslikavi določimo *matriko, ki ji pripada*, video. Pri tem pazite na to, da je matrika odvisna od baz, ki jih izberemo.
  - Primer matrike linearne preslikave $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, video.
  - Primer matrike linearne preslikave $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, video.
  - ↯ Naloga 3: Naj bo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki slika vektor $\vec{i}$ v $\vec{j}$, vektor $\vec{j}$ v $\vec{0}$, vektor $\vec{k}$ pa v $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Zapišite matriko, ki pripada T v standarni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.
  - ⋆ Naloga 4: Zapišite matriko, ki pripada odvajanju $\mathcal{D} : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ v standarni bazi prostora $\mathbb{R}_3[x]$.
- *Jedro* in *slika* linearne preslikave.
  - Definicija, video.
  - ↯ Naloga 5: Določite jedro odvajanja $\mathcal{D} : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$.
  - Zveza med dimenzijama jedra in slike, video.
- S tem smo se danes naučili globljega pogleda na matrike. Matrika ne bo več zgolj suhoparna tabela števil, ki jih lahko abstraktno obračamo in operiramo. Na matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je namreč vredno pogledati malo globlje, kot na pripadajočo linearno preslikavo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, za katero velja $\mathcal{A}(\vec{v}) = A\vec{v}$, video.
- Kompozitum linearnih preslikav, video.
- Oglejte si še naslednje vizualizacije, 3Blue1Brown, Essence of linear algebra,
  (1) Linear transformations and matrices.
  (2) Three-dimensional linear transformations.
  (3) Nonsquare matrices as transformations between dimensions.
  (4) Matrix multiplication as composition.
- Zapiski predavanj, 7. teden.

2. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Polona Oblak: Linearne preslikave. (Snovi linearnih preslikav ni v učbeniku Bojana Orla, zato sem vam spisala osnovne definicije z veliko primeri v ta dokument.)
(2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 7.
(3) Polona Oblak: Matematika, razdelek 6.5.
⋆ (4) (Za zahtevnejše bralce) Tomaž Košir: Linearna algebra, linearne preslikave, študijsko gradivo, 2007.

3. Ali razumem snov?

ϟ(1) Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, podana s predpisom

$$\tau\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ z \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zapišite matriko, ki pripada τ v standarni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

ϟ(2) Pokažite, da vsaka linearna preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ slika linearno odvisne vektorje v linearno odvisne.

ϟ(3) Drži ali ne drži?
(a) Če poznamo slike baznih vektorjev z linearno preslikavo $\psi\colon U \to V$, potem za vsak vektor $u \in U$ poznamo $\psi(u)$.
(b) Če je preslikava $\varphi\colon U \to U$ linearna, potem je linearna tudi preslikava $\varphi^2\colon U \to U$.
(c) Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki slika vektor $\vec{i}$ v $\vec{j}$, vektor $\vec{j}$ v $\vec{i}+\vec{j}$, vektor $2\vec{k}$ pa v $4\vec{i}$. Zapišite matriko, ki pripada τ v standarni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.
(d) Vsaka neničelna linearna preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slika linearno neodvisna vektorja v linearno neodvisna.

ϟ(4) Za vsako od naslednjih lastnosti poiščite primer linearne preslikave $\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki ima to lastnost.
(a) θ^2 je identična preslikava.
(b) $\theta^2 = \theta$.
(c) Jedro preslikave θ je trivialno.
(d) Obstaja vektor $v \in \mathbb{R}^3$, za katerega velja $\theta(v) = -v$.

ϟ(5) Za vsako od naslednjih lastnosti poiščite primer linearne preslikave $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, ki ima to lastnost.
(a) φ^2 je identična preslikava.
(b) $\varphi^2 = \varphi$.
(c) Jedro preslikave φ je trivialno.
(d) Obstaja matrika $A \in \mathbb{R}^3$, za katero velja $\varphi(A) = -A$.

⋆ (6) Naj bo $\tau\colon V \to U$ linearna preslikava iz vektorskega prostora V v vektorski prostor U.
(a) Pokažite, da je τ injektivna natanko tedaj, ko je $\ker\tau = \{0\}$.
(b) Pokažite, da je τ surjektivna natanko tedaj, ko je $\operatorname{im}\tau = U$.

ϟ(7) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Poglavje 5.

(Naloge, označene s ϟ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Nalogi, označeni s $\star$, dopolnjujeta obravnavano snov in širita vaše znanje.)