Poglavje 2

Sistemi linearnih enačb

Drugi sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

19. oktober 2020

Linearni sistem

Linearni sistem m enačb z n neznankami $x_1, \ldots, x_n$ je enak

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

kjer so a_{ij}, b_j realna števila. V matrični obliki ga zapišemo kot

$$Ax = b,$$

kjer je $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ matrika in $b = [b_j]_{j=1}^{m}$ vektor.

Geometrijski pomen sistema $Ax = b$

Naj bodo $a_{(1)}, a_{(2)}, \ldots, a_{(n)}$ stolpci matrike A, tj.,

$$a_{(i)} := \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Linearna kombinacija vektorjev $a_{(1)}, a_{(2)}, \ldots, a_{(n)}$ je vsak vektor oblike

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

kjer so $x_i \in \mathbb{R}$ realna števila.

Zanima nas, ali obstaja linearna kombinacija (1), ki je enaka b.

$Ax = b$ z vidika numerične matematike

- Kako **drago** je reševanje sistema $Ax = b$?
- Kateri **problemi** in **napake** se pojavijo med reševanjem $Ax = b$?
- Za nekatere matrike se da **enostavno** in **poceni** rešiti tak sistem: diagonalne, tridiagonalne, itd.
  - Ali so tu še kakšne take matrike? Kaj naredi matriko numerično "dobro"?
  - Ali obstajajo slabe matrike? Kako take numerično identificirati?

Inverz matrike

Naj bo A kvadratna matrika (t.j. $n \times n$ matrika). **Inverz** matrike A, označimo z A^{-1}, zadošča (če obstaja)

$$A^{-1} A = I \quad \text{in} \quad A A^{-1} = I$$

Formalna rešitev sistema $Ax = b$ je

$$x = A^{-1} b.$$

Toda **numerično** je **slabo** iskati x v tej obliki.

Zakaj?

- A^{-1} lahko ne obstaja.
- A^{-1} sploh ne bomo potrebovali.
- Reševanje prek izračuna A^{-1} zahteva več operacij, tj. je dražje.
- Računanje A^{-1} je lahko nestabilno, če je kakšna lastna vrednost A zelo majhna, tj. blizu 0.

Singularnost matrike A in reševanje sistema $Ax = b$

Inverz $n \times n$ matrike A **ne obstaja** (pravimo, da je **singularna**) natanko tedaj, ko velja ena od naslednjih trditev:

- Stolpci A so linearno odvisni.
- Vrstice A so linearno odvisne.
- $\mathrm{rank}(A) < n$
- $\det(A) = 0$
- Rešitev sistema $Ax = b$ lahko ne obstaja.
- Če rešitev sistema $Ax = b$ obstaja, ni enolična.

Za rešitve sistema $Ax = b$ obstajajo tri možnosti:

1. *A obrnljiva:* Obstaja **enolična rešitev** $x = A^{-1}b$.
2. *A ni obrnljiva in $b \in \mathrm{slika}(A)$:* Obstaja **neskončno rešitev**.
3. *A ni obrnljiva in $b \notin \mathrm{slika}(A)$:* **Ni rešitev**.

Reševanje sistema $Ax = b$ - primer

1. A je obrnljiva in rešitev je enolična:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \text{potem } x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. A ni obrnljiva in rešitev je neskončno:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{potem neskončno rešitev } x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. A ni obrnljiva in rešitev ne obstaja:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{potem ni rešitev.}$$

Reševanje trikotnih sistemov

Spodnje in **zgornjetrikotna** matrika L in U imata naslednjo obliko:

$$L = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & & \cdots & \ell_{nn} \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & & u_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Trikotna sistema

$$Ly = b \qquad Ux = c$$

zlahko rešimo s **premo substitucijo** oz. **obratno substitucijo**.

Obratna substitucija - primer

Sistem

$$U = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

je ekvivalenten sistemu

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ & & 3x_2 & + & -2x_3 & = & -1 \\ & & & & 4x_3 & = & 8 \end{array}$$

Rešujemo v obratnem vrstnem redu:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{8}{4} = 2, \\ x_2 &= \frac{1}{3}\,(-1 + 2x_3) = \frac{3}{3} = 1, \\ x_1 &= \frac{1}{-2}\,(9 - x_2 - 2x_3) = \frac{4}{-2} = -2. \end{aligned}$$

Obratna substitucija in število operacij

Reševanje $x_1, x_2, \dots, x_n$ v zgornjetrikotnem sistemu se imenuje **obratna substitucija**.

Algoritem 1: Obratna substitucija

```
zgornjetrikotna matrika U, vektor b
x_n = b_n / u_nn
for i = n-1 ... 1
  s = b_i
  for j = i+1 ... n
    s = s - u_ij x_j
  end
  x_i = s / u_ii
end
```

Število osnovnih računskih operacij:

- vrstica n: 1 deljenje
- vrstica -2: 1 množenje, 1 odštevanje, 1 deljenje, oz. 3 operacije
- vrstica -3: 2 množenje, 2 odštevanji, 1 deljenje, oz. 5 operacij
- vrstica -4: 3 množenja, 3 odštevanja, 1 deljenje, oz. 7 operacij
- $\vdots$
- vrstica -j: $2j - 1$ operacij

Skupaj osnovnih računskih operacij:

$$\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$$

Prema substitucija - primer

Sistem

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

je ekvivalenten sistemu

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & & & = & 8 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & = & 10 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

Rešujemo v obratnem vrstnem redu:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{8}{2} = 4, \\ x_2 &= \frac{1}{3}\,(10 - x_1) = \frac{6}{3} = 2, \\ x_3 &= \frac{1}{-2}\,(4 - 3x_1 + x_2) = \frac{-6}{-2} = 3. \end{aligned}$$

Prema substitucija in število operacij

Reševanje $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v spodnje trikotnem sistemu se imenuje **prema substitucija**.

Algoritem 2: Prema substitucija

```
spodnjetrikotna matrika L, vektor b
x_1 = b_1/ℓ_11
for i = 2...n
  s = b_i
  for j = 1...i-1
    s = s - ℓ_{i,j} x_j
  end
  x_i = s/ℓ_{i,i}
end
```

Število osnovnih računskih operacij:

- vrstica 1: 1 deljenje
- vrstica 2: 1 množenje, 1 odštevanje, 1 deljenje, oz. 3 operacije
- vrstica 3: 2 množenje, 2 odštevanji, 1 deljenje, oz. 5 operacij
- vrstica 4: 3 množenja, 3 odštevanja, 1 deljenje, oz. 7 operacij
- $\vdots$
- vrstica j: $2j-1$ operacij

Skupaj osnovnih računskih operacij:

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$$

Gaussova eliminacija

- **Gaussova eliminacija** je splošna metoda za reševanja kvadratnih sistemov.
- Trikotni sistemi so enostavni za reševanje - potrebujemo n^2 operacij.
- Naš cilj je pretvoriti poljubno kvadratno matriko v ekvivaletno zgornjetrikotno, nato pa sistem rešiti z obratno substitucijo.

Primer. Rešujemo $Ax = b$, kjer sta

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Tvorimo **razširjen sistem**

$$\tilde{A} = [A \ \ b] = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & -6 & 7 & -7 \\ 3 & -4 & 4 & -6 \end{array}\right]$$

Prištejemo 2-kratnik prve vrstice drugi in 1-kratnik prve vrstice tretji.

$$\tilde{A}_{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -9 \\ 0 & -2 & 3 & -7 \end{array}\right]$$

Odštejemo 1-kratnik druge vrstice od tretje

$$\tilde{A}_{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

Rešimo z obratno substitucijo

$$x_3 = \frac{2}{-2} = -1, \qquad x_2 = \frac{1}{-2}(-9 - 5x_3) = 2, \qquad x_1 = \frac{1}{-3}(-1 - 2x_2 + x_3) = 2.$$

Gaussova eliminacija

- Gaussova eliminacija je proces transformiranja razširjene matrike v ekvivalentno zgornje trikotno obliko.
- Eliminacijska operacija na k-tem koraku je

$$\boxed{\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ij} - (\tilde{a}_{ik}/\tilde{a}_{kk})\tilde{a}_{kj},} \quad i > k, \quad j \geqslant k$$

- Rezultat eliminacije je prikazan na spodnji sliki:

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x' & x' & x' & x' \\ 0 & 0 & x'' & x'' & x'' \\ 0 & 0 & 0 & x''' & x''' \end{bmatrix}$$

Algoritem 3: Gaussova eliminacija

```
Naj bosta dana n × n matrika A, in n × 1 vektor b

for k = 1 ... n − 1
  for i = k + 1 ... n
    for j = k ... n
      a_ij = a_ij − (a_ik / a_kk) a_kj
    end
    b_i = b_i − (a_ik / a_kk) b_k
  end
end
```

Gaussova eliminacija in njena cena

Dve poenostavitvi:

- a_{ik} / a_{kk} damo lahko ven iz j-te zanke
- 0 ne rabimo izračunati (razen kot test pravilnosti pri ročnem računanju)

Algoritem 4: Gaussova eliminacija

```
Naj bosta dana n × n matrika A, in n × 1 vektor b

for k = 1 ... n − 1
  for i = k + 1 ... n
    xmult = a_ik / a_kk
    a_ik = 0
    for j = k + 1 ... n
      a_ij = a_ij − (xmult) a_kj
    end
    b_i = b_i − (xmult) b_k
  end
end
```

Število osnovnih računskih operacij za GE matrike A:

Korak k	$\pm$	$\times$	$:$
1	$(n-1)^2$	$(n-1)^2$	$n-1$
2	$(n-2)^2$	$(n-2)^2$	$n-2$
$\vdots$			
$n-1$	1	1	1

$\pm$	$\sum_{j=1}^{n-1} j^2$
$\times$	$\sum_{j=1}^{n-1} j^2$
$:$	$\sum_{j=1}^{n-1} j$

Cena reševanja sistema prek Gaussove eliminacije

Velja

$$\sum_{j=1}^{p} j = \frac{p(p+1)}{2} \quad \text{in} \quad \sum_{j=1}^{p} j^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

Zato

$\pm$ za A	$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$
$\times$ za A	$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$
$:$ za A	$\frac{n(n-1)}{2}$
$\pm$ za b	$\frac{n(n-1)}{2}$
$\times$ in $:$ za b	$\frac{n(n-1)}{2}$

Cena obratne substitucije:

$\pm$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$\times$ in $:$	$\frac{n(n+1)}{2}$

Seštejemo ceni obeh korakov (eliminacija vrstic in obratna substitucija) in dobimo

$\pm$	$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$
$\times$ in $:$	$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n^2+3n-1)}{3}$

Torej je skupna cena vseh operacij

$$\boxed{\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2).}$$

$\Rightarrow$ podvojen n povroči povečanje cene za faktor 8

Eliminacijske matrike

- Pogled na uničevanje neničelnih elementov v stolpcu A prek matričnega množenja
- Želimo uničiti vse elemente od $(k+1)$-vega naprej v vektorju

  $$a = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T$$

  z neko matriko M_k, tj.

  $$M_k a = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{k+1} & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T.$$

- Izkaže se, da je prava matrika naslednja:

  $$M_k a = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -m_{k+1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -m_n & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

  kjer je $m_i = a_i / a_k$, $i = k+1, \dots, n$.

- Delitelj a_k se imenuje **pivot** (in mora biti **neničelen**).

Eliminacijske matrike

- Matriki M_k pravimo **eliminacijska matrika**.
  - Doda večkratnik k-te vrstice vsaki naslednji vrstici, pri čemer je faktor m_i
  - Rezultat so ničle v vseh vrsticah $i > k$.
- M_k je spodnjetrikotna in obrnljiva.
- $M_k = I - m_k e_k^T$ kjer je

$$m_k = [0, \dots, 0, m_{k+1}, \dots, m_n]^T$$

  in je e_k k-ti stolpec identične matrike I.
- Ni težko preveriti, da velja $M_k^{-1} = I + m_k e_k^T$, kjer je M_k^{-1} ponovno spodjetrikotna, in jo označimo z

$$M_k^{-1} = L_k.$$

- Naj bosta $M_j = I - m_j e_j^T$ in $M_k = I - m_k e_k^T$ eliminacijski matriki, pri čemer je $j \leqslant k$. Velja

$$\begin{aligned} M_j M_k &= I - m_j e_j^T - m_k e_k^T + m_j e_j^T m_k e_k^T \\ &= I - m_j e_j^T - m_k e_k^T + m_j (e_j^T m_k) e_k^T \\ &\underbrace{=}_{j \leqslant k} I - m_j e_j^T - m_k e_k^T, \end{aligned}$$

- Torej je $M_j M_k$ 'unija' njunih stolpcev.
- Enako velja za $M_j^{-1} M_k^{-1}$.

Primer

Naj bo $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$.

$$M_1 a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in

$$M_2 a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Torej je

$$L_1 = M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad L_2 = M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

in

$$M_1 M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad L_1 L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

LU razcep

- Cilj je prevesti sistem $Ax = b$ na zgornjetrikotno obliko. Sprva konstruiramo M_1 s pivotom a_{11} in eliminiramo prvi stolpec A pod diagonalo.
- Dobimo sistem $M_1 A x = M_1 b$ z istimi rešitvami.
- Konstruiramo M_2 s pivotom $\tilde{a}_{22}$ (ni isti kot a_{22}) in eliminiramo drugi stolpec pod diagonalo.
- Dobimo sistem $M_2 M_1 A x = M_2 M_1 b$ z istimi rešitevami.
- Nadaljujemo do

$$\underbrace{M_{n-1} \dots M_1 A}_{U} \, x = \underbrace{M_{n-1} \dots M_1 b}_{b'} .$$

- U je zgornje trikotna matrika. Sistem $Ux = b'$ rešimo z obratno substitucijo.
- Če iz sistema $M_{n-1} \dots M_1 A = U$ izrazimo A, dobimo

$$A = \underbrace{(M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_n^{-1})}_{L} \underbrace{((M_n M_{n-1} \dots M_1) A)}_{U}$$

- L je spodnjetrikotna, U pa zgornjetrikotna matrika.
- Temu racepu rečemo **LU razcep brez pivotiranja**.
- Reševanje $Ax = b$ pri istem A in k različnih vektorjev b (recimo k) stane prek:
  - Gaussove eliminacije $\frac{2}{3} kn^3 + \mathcal{O}(kn^2)$). (Že vemo.)
  - LU razcepa: $\frac{2}{3} n^3 + \mathcal{O}(kn^2)$. (Bomo kmalu preverili.)

LU razcep brez pivotiranja in cena

Algoritem 5: LU razcep brez pivotiranja

```
A n × n matrika

for k = 1, ..., n − 1
  for i = k + 1, ..., n
    ℓ_ik = a_ik / a_kk
    for j = k + 1, ..., n
      a_ij = a_ij − ℓ_ik a_kj
    end
  end
end
```

Št. operacij:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n}\left(1+\sum_{j=k+1}^{n}2\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n}\left(1+2(n-k)\right)=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\left(1+2(n-k)\right)$$

$$\underbrace{=}_{\ell=n-k}\sum_{\ell=1}^{n}\ell(1+2\ell)=\sum_{\ell=1}^{n}\ell+2\ell^2\underbrace{=}_{(*)}\frac{n(n+1)}{2}+2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2}{3}n^3+\mathcal{O}(n^2).$$

kjer smo v $(*)$ uporabili enakosti $\sum_{j=1}^{p} j=\frac{p(p+1)}{2}$ in $\sum_{j=1}^{p} j^2=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

Izrek

Za $n \times n$ matriko A sta naslednji trditvi ekvivalentni:

1. *LU razcep matrike A brez pivotiranja obstaja in je enoličen.*
2. *Vse vodilne podmatrike matrike A so nesingularne.*

Reševanje sistema $Ax = b$ prek LU razcepa

1. Izračunamo $A = LU$. Cena: $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.
2. Rešimo $Ly = b$ s premo subsitucijo. Cena: $n^2 - n$.
3. Rešimo $Ux = y$ z obratno subsitucijo. Cena: n^2.

Algoritem 6: Korak 2

```
spodnjetrikotna matrika L z 1 na diagonali, vektor b
y_1 = b_1
for i = 2...n
   y_i = b_i
   for j = 1...i-1
      y_i = y_i - ℓ_ij y_j
   end
end
```

Algoritem 7: Korak 3

```
zgornjetrikotna matrika U, vektor y
x_n = y_n / u_nn
for i = n-1...1
   x_i = b_i
   for j = i+1...n
      x_i = x_i - u_ij x_j
   end
   x_i = x_i / u_ii
end
```

Reševanje sistema $Ax = b$ prek LU razcepa

Primer

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -14 \\ 7 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

Rešimo $Ly = b$ *in dobimo* $y = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}^T$.
Rešimo $Ux = y$ *in dobimo* $x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$.

LU razcepa z delnim pivotiranjem

LU razcep brez pivotiranja odpove npr. pri matrikah

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1e-10 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Rešitev je delno pivotiranje. Pri delnem pivotiranju pred eliminacijo v j-tem stolpcu primerjamo elemente

$$a_{jj}, a_{j+1,j}, \ldots, a_{nj},$$

nato pa zamenjamo j-to vrstico s tisto, ki vsebuje element z največjo absolutno vrednostjo.

Menjava j-te in k-te vrstice pa je množenje z leve s permutacijsko matriko P_{jk}, ki se od identitete razlikuje le v j-ti in k-ti vrstici, ki sta zamenjani.

Algoritem 8: LU razcep z delnim pivotiranjem

```
A  n×n matrika

P = I
L = I
for k = 1,...,n−1
  poisci indeks q, ta katerega je |a_qj| = max_{j≤p≤n} |a_pj|
  zamenjaj vrstici z indeksoma q,j v matrikah A,L,P
  for i = k+1,...,n
    ℓ_ik = a_ik / a_kk
    for j = k+1,...,n
      a_ij = a_ij − ℓ_ik a_kj
```

Delno pivotiranje

Dodatno delo pri LU razcepu z delnim pivotiranjem je $\mathcal{O}(n^2)$ primerjanj in menjav. Torej je skupna cena še vedno

$$\boxed{\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)}.$$

Opazimo, da je absolutna vrednost elementov ℓ_{ij} navzgor omejena z 1 (kar bo pomembno pri ocenjevanju obratne stabilnosti).

$Ax = b$ prek LU razcepa z delnim pivotiranjem:

1. Izračunamo $PA = LU$. Cena: $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.
2. Rešimo $Ly = Pb$ s premo subsitucijo. Cena: $n^2 - n$.
3. Rešimo $Ux = y$ z obratno subsitucijo. Cena: n^2.

Na **obstoj** LU razcepa z **delnim pivotiranjem** pa odgovori naslednji izrek:

Izrek

Za $n \times n$ matriko A sta naslednji trditvi ekvivalentni:

1. *LU razcep matrike A z delnim pivotiranjem obstaja, tj. obstaja permutacijska matrika P, da velja $PA = LU$.*
2. *Matrika A je nesingularna.*

$Ax = b$ prek LU razcepa z delnim pivotiranjem - primer

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -14 \\ 7 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & 9 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{1\leftrightarrow 2} \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -5 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\sim}_{2\leftrightarrow 3} \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -5 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{5} & -\frac{16}{5} & \frac{58}{10} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\sim}_{3\leftrightarrow 4} \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{5} & -\frac{16}{5} & \frac{58}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{5} & -\frac{16}{5} & \frac{58}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Torej:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{5} & \frac{58}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

$Ax = b$ prek LU razcepa z delnim pivotiranjem

Za P dobimo

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{1\leftrightarrow 2}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{2\leftrightarrow 3}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{3\leftrightarrow 4}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

Rešimo $Ly = Pb = \begin{pmatrix}-14 & 7 & -16 & 8\end{pmatrix}^T$ in dobimo

$$y = \begin{pmatrix}-14 & 0 & -9 & -\frac{1}{8}\end{pmatrix}^T.$$

Rešimo $Ux = y$ in dobimo

$$x = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}^T.$$

Pri kompletnem pivotiranju pred eliminacijo v j-tem stolpcu poiščemo element z največjo absolutno vrednostjo v podmatriki $A(j:n, j:n)$ in nato izvedemo ustrezni menjavi vrstic in stolpcev.

Dodatno delo pri LU razcepu s kompletnim pivotiranjem je $\mathcal{O}(n^3)$ primerjanj in menjav. Torej je skupna cena dražja od LU razcepa z delnim pivotiranjem in se v praksi redko uporablja.

Analiza zaokrožitvenih napak pri LU razcepu

Sistem $Ax = b$ smo rešili prek LU razcepa in dobili približek $\hat{x}$. V resnici je to rešitev sistema $(A + \Delta A)\hat{x} = b$. Radi bi ocenili, kakšnega velikostnega razreda je ΔA v primerjavi z A.

Sprva rešimo sistem $Ly = b$ s premo substitucijo:

```
for i = 1, 2 ... n
        y_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} ℓ_ij y_j) / ℓ_ii
```

in dobimo $\hat{y}$, ki zadošča $(L + \Delta L)\hat{y} = b$.

Spomnimo se:

- Za $u, v \in \mathbb{R}^n$ velja

$$\langle v, u\rangle = \mathrm{fl}(\mathrm{fl}(v^T)\mathrm{fl}(u)) = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i (1 + \gamma_i), \quad \text{kjer je} \quad |\gamma_i| \leqslant nu.$$

- Za $|\delta| < u$ velja:

$$\left|\frac{1}{1+\delta}\right| = |1 - \delta + \delta^2 - \delta^3| \leqslant 1 + u + \mathcal{O}(u^2).$$

Velja

$$\hat{y}_i = \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij}\hat{y}_j(1 + \gamma_{ij})\Big)/\ell_{ii}(1 + \delta_i)(1 + \delta_i'),$$

kjer so $|\gamma_{ij}| \leqslant (i-1)u$ napake pri računanju skalarnih produktov, $|\delta_i| \leqslant u$, $|\delta_i'| \leqslant u$ pa napaki pri odštevanju in deljenju.

Analiza zaokrožitvenih napak pri LU razcepu

Zato velja

$$\sum_{j=1}^{i} \ell_{ij}\hat{y}_i(1+\gamma_{ij}) = b_i,$$

kjer je $1+\gamma_{ii} = \frac{1}{(1+\delta_i)(1+\delta_i')}$ in zato $|\gamma_{ii}| \leqslant 2u$. Sledi $\Delta\ell_{ij} = \ell_{ij}\gamma_{ij}$ in tako $|\Delta\ell_{ij}| \leqslant nu|\ell_{ij}|$.

Z $|A|$ označimo matriko z elementi $|a_{ij}|$, oznaka $|A| \leqslant |B|$ pa pomeni, da je $|a_{ij}| \leqslant |b_{ij}|$ za vsak $i, j = 1, \ldots, n$.

Dokazali smo naslednjo trditev:

Trditev

Izračunana rešitev $\hat{y}$ sistema $Ly = b$ zadošča $(L+\Delta L)\hat{y} = b$, pri čemer je

$$|\Delta L| \leqslant nu|L|.$$

Analogno dokažemo tudi trditev:

Trditev

Izračunana rešitev $\hat{x}$ sistema $Ux = y$ zadošča $(U+\Delta U)\hat{x} = y$, pri čemer je

$$|\Delta U| \leqslant nu|U|.$$

Sklep:

Trditev

Reševanje trikotnih sistemov je obratno stabilno.

Analiza zaokrožitvenih napak pri LU razcepu

Računanje LU razcepa pa ni obratno stabilno:

Trditev

Naj bo A nesingularna matrika, pri kateri se izvede LU razcep brez pivotiranja. Za izračunani matriki $\hat{L}, \hat{U}$ velja $A = \hat{L}\hat{U} + E$, kjer je

$$|E| \leqslant nu|\hat{L}||\hat{U}|.$$

Lahko se zgodi, da je $|\hat{L}||\hat{U}|$ zelo velik v primerjavi z $|A|$, zato računanje LU razcepa v splošnem **ni obratno stabilna metoda**.

Izrek

Naj bo A nesingularna matrika. Za izračunano rešitev $\hat{x}$ sistema $Ax = b$ s pomočjo LU razcepa velja $(A + \Delta A)\hat{x} = b$, kjer je

$$|\Delta A| \leqslant 3nu|L||U|.$$

Za obratno stabilnost reševanja sistema $Ax = b$ prek LU razcepa potrebujemo oceno

$$3nu|L||U| = \mathcal{O}(u)|A|.$$

Analiza zaokrožitvenih napak pri LU razcepu

- Če želimo omejiti $|L|$, moramo uporabiti pivotiranje. Potem bo veljalo $|\ell_{ij}| \leqslant 1$.
- Oceniti pa moramo še $|U|$. Vpeljemo **pivotno rast**

$$g := \frac{\max_{i,j} |u_{ij}|}{\max_{i,j} |a_{ij}|}.$$

Sledi

$$\max_{ij} |(\Delta A)_{ij}| \leqslant 3n^2 ug \max_{ij} |a_{ij}|.$$

Če je pivotna rast g majhna, lahko pričakujemo majhno napako.

Trditev

Pri delnem pivotiranju je pivotna rast omejena z 2^{n-1}.

Velja namreč $|\ell_{ij}| \leqslant 1$, a_{ij} pa na vsakem od največ $n-1$ korakov izračunamo kot $a_{ij} = a_{ij} - \ell_{ik} a_{kj}$. Torej se absolutna vrednost največjega elementa v matriki kvečjemu podvoji.

Žal obstajajo matrike s pivotno rastjo 2^{n-1} za vsak n, tako da LU razcep z **delnim pivotiranjem teoretično ni obratno stabilen**.

Statistično pa velja, da je pričakovana vrednost pivotne rasti $\mathcal{O}(n^{2/3})$, tako da LU razcep z **delnim pivotiranjem v praksi je obratno stabilen**.