Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

3. IZPIT, LINEARNA ALGEBRA TEORETIČNI DEL
16. avgust 2021

(Na teoretičnem delu je 7 nalog, ki so skupaj vredne 56 točk. Za 100% je potrebno doseči 50 točk.)

1. (8 točk) V $\mathbb{R}^3$ je podana ravnina $\Sigma : x + 2y + 2z = 0$.

   A. Zapišite nek enotski vektor, ki leži v ravnini Σ.

   B. Zapišite nek enotski vektor, ki je pravokoten na ravnino Σ.

2. (8 točk) Za dane vektorje $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_7} \in \mathbb{R}^{13}$ naj velja $\vec{v_6} = \vec{v_1} + \vec{v_3} - 2\vec{v_5} \neq \vec{0}$. Določite vse možne vrednosti za dimenzijo linearne ogrinjače $\mathcal{L}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_7}\}$.

3. Naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ enotski vektorji v $\mathbb{R}^n$ in naj bosta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ortogonalna. Zapišite pravokotno projekcijo vektorja $\vec{c}$ na linearno ogrinjačo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

4. (8 točk) Zapišite primer kvadratnih matrik A in B, za kateri velja $AB = 0$ in $BA \neq 0$.

5. (8 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika. Pokažite, da je tudi matrika A^3 obrnljiva.

6. (8 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizabilna matrika, za katero velja, da je vsaka njena lastna vrednost enaka bodisi 0 bodisi -1. Kaj lahko poveste o matriki $A^2 + A^3$?

7. (8 točk) Katere od naslednjih trditev so pravilne za poljubni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, za kateri velja $\det A > 0$ in $\det B = 0$?

   A. A^3 je obrnljiva

   B. AB je obrnljiva

   C. $\mathrm{rang}(A) = 5$

   D. $\mathrm{rang}(B) = 5$

   E. A ima le pozitivne lastne vrednosti

   F. 0 je lastna vrednost matrike A

   G. 0 je singularna vrednost matrike B

   H. Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ ima rešitev za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$

   (Obkrožite vse pravilne odgovore. Če boste obkrožili **vse** pravilne odgovore, a nobenega napačnega, boste dobili 8 točk. Če boste obkrožili vsaj polovico pravilnih odgovorov, a nobenega napačnega, boste dobili 4 točk. V nasprotnem primeru pa 0 točk. Pri tej nalogi odgovora ni potrebno utemeljevati.)