Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

Naloge	1 – 6	7 – 10	11 – 14	Skupaj	Odstotek
Možne točke:	24	24	16	64	100
Dosežene točke:					

2. IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE 2017/18

3. julij 2018

Splošni napotki:

- ☐ Izpit vsebuje 14 nalog in obsega 4 strani. Čas za reševanje je 45 minut.
- ☐ Vsako prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona, slušalk in drugih pripomočkov se bo sankcioniralo z odvzemom izpita.

Za vsako od trditev 1 – 6 obkrožite ali drži ali ne drži.
Če drži, utemeljite, zakaj. Če ne drži, zapišite protiprimer.

1. Če sta $u, v \in \mathbb{R}^3$ neničelna vektorja, ki oklepata kot $\frac{\pi}{3}$, potem sta vektorja $\mathrm{proj}_u v$ in $\mathrm{proj}_v u$ nekolinearna.

   DRŽI NE DRŽI

2. Rang matrike je enak številu njenih neničelnih vrstic.

   DRŽI NE DRŽI

3. Vsaka baza prostora $\mathbb{R}^{2\times 4}$ ima največ 4 elemente.

DRŽI NE DRŽI

4. Za vsako 4×4 matriko, ki ima zadnjo vrstico enako prvi, velja, da ni obrnljiva.

DRŽI NE DRŽI

5. Če je A matrika reda $n\times n$, potem je $\det(nA) = n\det(A)$.

DRŽI NE DRŽI

6. Matrika $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ima edini lastni vrednosti enaki 1 in -1. Če je $\operatorname{rang}(A - I) = 1$, potem je A diagonalizabilna.

DRŽI NE DRŽI

Pri vsakem od vprašanj 7 – 10 za vsako od trditev v pripadajoči kvadratek ☐ jasno označite, če je trditev pravilna ☑ oziroma napačna ☒.

Za vsak pravilen odgovor boste prejeli 2 točki, za vsak napačen pa -1 točko. Če pustite kvadratek prazen, dobite 0 točk.

7. Naj bo premica p v $\mathbb{R}^3$ podana z

$$p: \ \frac{x+1}{6} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{-2}$$

Katere od naslednjih trditev so resnične?

- ☐ Vektor $[6,\ 3,\ -2]^T$ je vzporeden s premico p.
- ☐ Vektor $[-1,\ 4,\ 1]^T$ je vzporeden s premico p.
- ☐ Vektor $[12,\ 6,\ -4]^T$ je vzporeden s premico p.
- ☐ Točka $(6, 3, -2)$ leži na premici p.
- ☐ Točka $(-1, 4, 1)$ leži na premici p.
- ☐ Premica p je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.

8. Če sta A in B obrnljivi $n \times n$ matriki, katere od naslednjih trditev so resnične?

- ☐ $(A^{-1})^{-1} = A$
- ☐ $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$
- ☐ $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- ☐ $\det(AB) = 0$
- ☐ AB je obrnljiva
- ☐ $A + B$ je obrnljiva
- ☐ $A + I$ je obrnljiva
- ☐ 0 je lastna vrednost A

9. Katere od naslednjih množic so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^n$?

- ☐ Vsi vektorji dolžine 1.
- ☐ Vsi vektorji, ki so pravokotni na vektor $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
- ☐ Vsi vektorji, ki niso kolinearni vektorju $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
- ☐ Vsi vektorji, ki so kolinearni vektorju $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
- ☐ Vsi vektorji, katerih prva komponenta je neničelna.
- ☐ Vsi vektorji, katerih prva komponenta je ničelna.

10. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ simetrična pozitivno semidefinitna matrika. Katere od naslednjih trditev so resnične?

- ☐ Matrika A ima vseh pet lastnih vrednosti nenegativnih.
- ☐ Matrika A je obrnljiva.
- ☐ Matrika A je diagonalizabilna.
- ☐ $\det(A) \geq 0$.

Odgovorite na vsako od vprašanj 11 – 14 in odgovor utemeljite.

11. Zapišite vse enotske vektorje, ki so kolinearni vektorju $[1,\ -1,\ -2]^T$.

11. __________

12. Naj bo A neničelna matrika velikosti 3×8 in $d = \dim N(A)$. Zapišite **vse** možne vrednosti števila d.

12. __________

13. Če je $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika, za katero velja $Q^T Q = I$, izračunajte vse možne vrednosti njene determinante.

13. __________

14. Naj bo A 3×3 simetrična matrika z lastnimi vrednostmi 1, 2 in 3. Lastni vektor pri lastni vrednosti 1 je enak $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, lastni vektor pri lastni vrednosti 2 pa $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Zapišite lastni vektor pri lastni vrednosti 3.

14. __________