TEORETIČNI DEL, 3. junij 2020

1. Zapišite primer neidentične linearne preslikave (ali njene matrike)

A. (2.5 točke) $\vartheta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, za katero je ϑ^2 identična preslikava.

> Takšnih preslikav je kar nekaj. Denimo:
>
> (a) Zrcaljenje čez poljubno premico $y = kx$. (Premica mora potekati skozi koordinatno izhodišče, sicer zrcaljenje ni linearna preslikava.)
>
> (b) Zasuk za kot $180°$ okoli koordinatnega izhodišča.
>
> (c) Preslikava, ki ji v standardni bazi pripada matrika $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (Tu lahko zapišete poljubno matriko, katere kvadrat je enak identični matriki.)
>
> (Točkovanje: 2.5 točke za pravilno preslikavo, 0 sicer. Za nelinearne preslikave in za preslikave, katerih kvadrat ni identična preslikava, ne dobite točk.)

B. (2.5 točke) $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ s trivialnim jedrom.

> Preslikave $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ s trivialnim jedrom so natanko bijekcije. Kot na primer:
>
> (a) Preslikava, ki ji v standardni bazi pripada 4×4 obrnljiva matrika. (Da, 4×4, saj je $\dim \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$.)
>
> (b) $\varphi(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A$ (oz. množenje s poljubno matriko polnega ranga).
>
> (c) $\varphi(A) = 5A$ (oz. poljubni neničelni večkratnik A).
>
> (d) Transponiranje $\varphi(A) = A^T$.
>
> (Točkovanje: 2.5 točke za pravilno preslikavo, 0 sicer. Za nelinearne preslikave in za preslikave z netrivialnim jedrom ne dobite točk.)

2. Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ obrnljiva. Za vsako od naslednjih trditev obkrožite ali drži ali ne drži. Svoj odgovor dobro utemeljite.

A. (5 točk) Matrika $2A^5$ je obrnljiva.

DRŽI NE DRŽI

> Možna pristopa:
>
> (a) Inverz matrike $2A^5$ je $\frac{1}{2}A^{-5}$, saj je $(2A^5)(\frac{1}{2}A^{-5}) = I_4$.
>
> (b) Ker je A obrnljiva, je $\det(A) \neq 0$ in zato tudi $\det(2A^5) = 2^4 \det(A)^5 \neq 0$.
>
> (Točkovanje: pravilen argument: 5 točk, 0 sicer. Za vse, ki ste utemeljevali z besedami, je število točk odvisno od kvalitete utemeljitve.)

B. (5 točk) A ima štiri pozitivne lastne vrednosti.

DRŽI $\qquad$ $\boxed{\text{NE DRŽI}}$

Matrika A $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ je obrnljiva in ima lastne vrednosti $1, 1, 1, -1$. Zato trditev ne drži.

(Točkovanje: pravilen protiprimer 5 točk (zgornji seveda ni edini), 2.5 točke za utemeljitev v stilu "Ni pogojev, da bi bile lastne vrednosti pozitivne. Lahko so tudi negativne. Zaradi obrnljivosti matrike A le ne smejo biti ničelne.")

C. (5 točk) 0 ni singularna vrednost matrike A, če ste ubrali prvi pristop.

$\boxed{\text{DRŽI}}$ $\qquad$ NE DRŽI

Singularne vrednosti matrike A so koreni lastnih vrednosti matrike $A^\mathsf{T}A$. Ker je matrika A obrnljiva, je obrnljiva tudi matrika $A^\mathsf{T}A$, zato so lastne vrednosti $A^\mathsf{T}A$ neničelne. Koreni neničelnih števil so neničelna števila.

(Točkovanje: pravilen argument: 5 točk, delna utemeljitev 2.5 točke.)

3. (10 točk) Naj bo $\vec{b} = [-1,\ 1,\ 2,\ 3]^\mathsf{T}$ ter $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ matrika z lastnimi vrednostmi -1, 1, 2 in 3. Določite (z utemeljitvijo):

A. $\det(A^2)$

Lastne vrednosti kvadrata matrike so kvadrati lastnih vrednosti matrike A, torej 1, 1, 4 in 9. Determinanta matrike pa produkt lastnih vrednosti. Zatorej $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 9 = 36$. (Ali pa $\det(A^2) = \det(A)^2 = (-1\cdot 1\cdot 2\cdot 3)^2 = 36$.)

B. $\operatorname{rang}(A - 2I)$

Ker je 2 enojna lastna vrednost matrike A, je $\dim N(A - 2I) = 1$, zato je $\operatorname{rang}(A-2I) = 3$.

C. število rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$

Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ ima natanko eno rešitev, saj je matrika A obrnljiva ($\det(A) = -6 \neq 0$) in je $x = A^{-1}\vec{b}$ edina rešitev.
(Pazite, tu ne morete operirati z razširjeno matriko sistema, saj je A ni enaka (le podobna) diagonalni matriki z diagonalnimi elementi -1, 1, 2 in 3.)

(Točkovanje: A in B del vsak po 2.5 točk, C del 5 točk.)

4. (5 točk) Naj bodo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ linearno neodvisni. Pokažite, da so linearno neodvisni tudi vektorji $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{b}+\vec{c}$ in $\vec{c}$.

Denimo, da je neka linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{b}+\vec{c}$ in $\vec{c}$ enaka ničelnemu vektorju:

$$\alpha(\vec{a}+\vec{c})+\beta(\vec{b}+\vec{c})+\gamma\vec{c}=\vec{0}.$$

Potem (po distributivnosti) velja

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+(\alpha+\beta+\gamma)\vec{c}=\vec{0}.$$

Ker so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ linearno neodvisni, sledi $\alpha=0$, $\beta=0$ in $\alpha+\beta+\gamma=0$. Zatorej $\alpha=\beta=\gamma=0$, iz česar sledi, da so vektorji $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{b}+\vec{c}$ in $\vec{c}$ linearno neodvisni.

(Točkovanje: 5 točk, če vaš argument vsebuje linearno kombinacijo **in** linearno neodvisnost $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$. 2.5 točke za delne utemeljitve.)

5. (5 točk) Naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ enotski vektorji v $\mathbb{R}^5$ in naj velja $\vec{b}\perp\vec{c}$. Zapišite projekcijo vektorja $\vec{a}$ na linearno ogrinjačo vektorjev $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

Ker $\vec{b}$ in $\vec{c}$ tvorita ONB prostora $\mathcal{L}\{\vec{b},\vec{c}\}$, je matrika projekcije na $\mathcal{L}\{\vec{b},\vec{c}\}$ enaka

$$\begin{bmatrix}\vec{b} & \vec{c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{b}^{\mathsf{T}}\\ \vec{c}^{\mathsf{T}}\end{bmatrix}=\vec{b}\vec{b}^{\mathsf{T}}+\vec{c}\vec{c}^{\mathsf{T}}.$$

Torej je projekcija vektorja $\vec{a}$ na $\mathcal{L}\{\vec{b},\vec{c}\}$ enaka

$$\vec{b}\vec{b}^{\mathsf{T}}\vec{a}+\vec{c}\vec{c}^{\mathsf{T}}\vec{a}. \tag{1}$$

Druga rešitev: projekcija vektorja $\vec{a}$ na $\mathcal{L}\{\vec{b},\vec{c}\}$ je enaka vsoti projekcij $\vec{a}$ na $\vec{b}$ in $\vec{a}$ na $\vec{c}$, torej enaka

$$(\vec{a}^{\mathsf{T}}\vec{b})\vec{b}+(\vec{a}^{\mathsf{T}}\vec{c})\vec{c}. \tag{2}$$

(Po distributivnosti matričnega množenja in simetričnosti skalarnega produkta sta ta izraza (1) in (2) enaka.)

(Točkovanje: 2.5 točke za matriko projekcije.)

6. Simetrična matrika A naj ima karakteristični polinom enak $\Delta_A(x)=x^4-x^3$.

   A. (5 točk) Izračunajte $\dim N(A)$.

   $\dim N(A)$ je dimenzija lastnega podprostora pri lastni vrednosti 0. Ker je

   $$\Delta_A(x)=x^4-x^3=x^3(x-1),$$

   je $\lambda_{1,2,3}=0$ in $\lambda_4=1$. Ker je A simetrična matrika, je dimenzija lastnega podprostora enaka stropnji ničle v karakterističnem polinomu in zatorej je $\dim N(A)=3$.

   (Točkovanje: 5 točk za popolno utemeljitev, 2.5 točke za faktorizacijo $\Delta_A(x)$ in sklep $1\le\dim N(A)\le 3$ brez uporabe predpostavke, da je A simetrična matrika.)

B. (5 točk) Naj bo $\vec{v} = [1,\ 0,\ 0,\ 1]^\mathsf{T}$ lastni vektor matrike A pri lastni vrednosti 1. Zapišite vsaj en lastni vektor $\vec{w}$ pri lastni vrednosti 0.

Lastni vektorji simetrične matrike pri različnih lastnih vrednostih so med seboj pravokotni. Zatorej je $\vec{w}$ poljuben vektor, ki je pravokoten na $\vec{v} = [1,\ 0,\ 0,\ 1]^\mathsf{T}$. Denimo $\vec{w} = [1,\ 0,\ 0,\ -1]^\mathsf{T}$, $\vec{w} = [0,\ 1,\ 0,\ 0]^\mathsf{T}$, $\vec{w} = [0,\ 0,\ 1,\ 0]^\mathsf{T}$ ali pa $\vec{w} = [2\pi,\ e^\pi, 5e^{-3},\ -2\pi]^\mathsf{T}$.

(Točkovanje: 5 točk za popolno utemeljitev, ki vključuje simetričnost matrike A in ortogonalnost njenih lastnih vektorjev pri različnih lastnih vrednostih.)