Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

Linearna algebra: 2. računski izpit

17. junij 2020

Čas pisanja: 70 minut. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (15 točk)

Imejmo matriko in vektorja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) (8) Utemelji, da je sistem $A\vec{x} = \vec{b}_1$ rešljiv. Utemelji, da sistem $A\vec{x} = \vec{b}_2$ *ni* rešljiv.

Rešitev: Na razširjeni matriki $[A \mid \vec{b}_1\ \vec{b}_2]$ naredimo en korak Gaussove eliminacije (tretji vrstici prištejemo prvo):

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right].$$

Opazimo, da sta levi strani v drugi in tretji vrstici enaki, v zadnjem stolpcu pa ne. To pomeni, da je sistem $A\vec{x} = \vec{b}_2$ protisloven in zato nima rešitev. ....(4 točke)

Nadaljujemo z Gaussovo eliminacijo na $[A \mid \vec{b}_1]$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ker sta ranga matrike sistema A in razširjene matrike sistema $[A \mid \vec{b}_1]$ enaka, je sistem $A\vec{x} = \vec{b}_1$ rešljiv. ....(4 točke)

b) (7) Poišči vse rešitve sistemov $A\vec{x} = \vec{b}_1$ ter $A\vec{x} = \vec{0}$.

Rešitev: Pišimo $\vec{x} = [x, y, z, w]^{\mathsf{T}}$. Iz prve vrstice razširjene matrike, ki smo jo dobili na koncu Gaussove eliminacije, lahko izrazimo $x = 1 - y - 2w$, iz druge pa $2z = 2 + w$. Rešitve sistema $A\vec{x} = \vec{b}_1$ so torej oblike

$$[1 - y - 2w,\ y,\ 1 + \tfrac{1}{2}w,\ w]^{\mathsf{T}},$$

kjer sta y in w poljubni realni števili. ....(4 točke)

Če namesto tega rešujemo sistem $A\vec{x} = \vec{0}$, bodo rešitve oblike

$$[-y - 2w,\ y,\ +\tfrac{1}{2}w,\ w]^{\mathsf{T}},$$

kjer sta y in w poljubni realni števili (partikularna rešitev $[1, 0, 1, 0]^{\mathsf{T}}$ odpade, ostane samo rešitev homogenega dela). ....(3 točke)

2. naloga (17 točk)

Naj bo $\vec{a} = [1, -1]^\mathsf{T}$. Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je podana s predpisom

$$\phi(\vec{x}) = \vec{a}\vec{x}^\mathsf{T} + \vec{x}\vec{a}^\mathsf{T}.$$

a) (3) Preveri, da je ϕ linearna.

Rešitev: Za vse $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ in vse $\alpha \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x}+\vec{y}) &= \vec{a}(\vec{x}+\vec{y})^\mathsf{T} + (\vec{x}+\vec{y})\vec{a}^\mathsf{T} = \vec{a}(\vec{x}^\mathsf{T}+\vec{y}^\mathsf{T}) + \vec{x}\vec{a}^\mathsf{T} + \vec{y}\vec{a}^\mathsf{T} = \\
&= \vec{a}\vec{x}^\mathsf{T} + \vec{a}\vec{y}^\mathsf{T} + \vec{x}\vec{a}^\mathsf{T} + \vec{y}\vec{a}^\mathsf{T} = \vec{a}\vec{x}^\mathsf{T} + \vec{x}\vec{a}^\mathsf{T} + \vec{a}\vec{y}^\mathsf{T} + \vec{y}\vec{a}^\mathsf{T} = \\
&= \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y}), \\
\phi(\alpha\vec{x}) &= \vec{a}(\alpha\vec{x})^\mathsf{T} + (\alpha\vec{x})\vec{a}^\mathsf{T} = \vec{a}(\alpha\vec{x}^\mathsf{T}) + \alpha(\vec{x}\vec{a}^\mathsf{T}) = \alpha(\vec{a}\vec{x}^\mathsf{T}) + \alpha(\vec{x}\vec{a}^\mathsf{T}) = \\
&= \alpha(\vec{a}\vec{x}^\mathsf{T} + \vec{x}\vec{a}^\mathsf{T}) = \alpha\phi(\vec{x}),
\end{aligned}$$

zato je ϕ linearna.

.... (3 točke)

b) (7) Poišči matriko M, ki pripada preslikavi ϕ v standardnih bazah $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Rešitev: Standardna baza za $\mathbb{R}^2$ je $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, za $\mathbb{R}^{2\times 2}$ pa $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$. Izračunamo

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{e}_1) &= \vec{a}\vec{e}_1^\mathsf{T} + \vec{e}_1\vec{a}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 2E_{11} - E_{12} - E_{21}.
\end{aligned}$$

Podobno dobimo še

$$\phi(\vec{e}_2) = E_{12} + E_{21} - 2E_{22}.$$

.... (4 točke)

Matrika za preslikavo ϕ v standardnih bazah je torej

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

.... (3 točke)

c) (7) Določi $\ker(\phi)$ in $\operatorname{im}(\phi)$.

Rešitev: Z Gaussovo eliminacijo na matriki M dobimo

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

.... (1 točka)

Od tu lahko sklepamo, da je $\operatorname{rang}(M) = 2 = \dim(\operatorname{im}(\phi))$ in ker sta sliki $\phi(\vec{e}_1)$ in $\phi(\vec{e}_2)$ linearno neodvisni, je

$$\operatorname{im}(\phi) = \mathcal{L}(\{2E_{11} - E_{12} - E_{21}, E_{12} + E_{21} - 2E_{22}\}).$$

.... (3 točke)

Ker je

$$2 = \dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\operatorname{im}(\phi)) = \dim(\ker(\phi)) + 2,$$

je $\dim(\ker(\phi)) = 0$ in je $\ker(\phi) = \{0\}$.

.... (3 točke)

3. naloga (18 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

a) (6) Izračunaj lastne vrednosti matrike A.

Rešitev: Izračunamo karakteristični polinom .... (1 točka)

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -3-\lambda & 0 \\ -1 & -2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -(\lambda+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -(\lambda+3)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -(\lambda+3)\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 \\ 2 & 2+\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)((\lambda+1)(\lambda+2)-2) = \\
&= -(\lambda+3)((\lambda+1)(\lambda+2)-2) = -\lambda(\lambda+3)^2.
\end{aligned}$$

Lastne vrednosti matrike A so torej $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_{2,3} = -3$. .... (5 točk)

b) (6) Poišči ortonormirano bazo za lastni podprostor za najmanjšo lastno vrednost matrike A.

Rešitev: Najmanjša lastna vrednost je $\lambda_{2,3} = -3$. Najprej zračunamo pripadajoče lastne vektorje. Ker je

$$A + 3I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

.... (3 točke)

so lastni vektorji pri tej lastni vrednosti oblike $[y-z, y, z]^\mathsf{T}$. Naj bo, na primer, $v_2 = [1,1,0]^\mathsf{T}$ in $v_3 = [-1,0,1]^\mathsf{T}$. Po Gram-Schmidtovem postopku dobimo

$$\begin{aligned}
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 = [1,1,0]^\mathsf{T}, \\
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\vec{u}_2}{\vec{u}_2\vec{u}_2}\vec{u}_2 = [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1]^\mathsf{T}.
\end{aligned}$$

.... (2 točki)

Ko dobljena pravokotna vektorja še normiramo, dobimo $\vec{q}_2 = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0]^\mathsf{T}$ in $\vec{q}_3 = [-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}]^\mathsf{T}$.
.... (1 točka)

c) (3) Določi bazo za ničelni prostor $N(A)$.

Rešitev: Ker je

$$A + 0I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

.... (2 točki)

so lastni vektorji za lastno vrednost $\lambda_1 = 0$ oblike $[z, -z, z]^\mathsf{T}$. Bazo $N(A)$ lahko torej tvori vektor $\vec{v}_1 = [1,-1,1]^\mathsf{T}$ ali pa $\vec{q}_1 = [\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]^\mathsf{T}$. .... (1 točka)

d) (3) Zapiši ortogonalno matriko Q in diagonalno matriko D, da bo veljalo $A = QDQ^\mathsf{T}$.

Rešitev: $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, ... (2 točki) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ .... (1 točka)