Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

Linearna algebra: 3. računski izpit

25. avgust 2020

Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 5a & 1+2a \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2+2a & 4+a \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1+2a \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

kjer je $a \in \mathbb{R}$ parameter.

a) (5) Za primer $a = 1$ poišči rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

Rešitev: Z Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki $[A \mid b]$ pri $a = 1$ dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right],$$

zato je iskana rešitev $\vec{x} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^\mathsf{T}$. .... (5 točk)

b) (10) Za katere vrednosti a matrika A nima inverza? Za te primere določi bazne vektorje za $N(A)$.

Rešitev: Matrika ne bo imela inverza, če bo njen rang manjši od 3 (oziroma njena determinanta matrike enaka 0). Najprej naredimo Gaussovo eliminacijo (pri čemer dodamo še desno stran sistema, ki ga bomo morali rešiti v naslednji točki, da si prihranimo nekaj dela):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2a & 5a & 1+2a & 1+2a \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2+2a & 4+a & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2a & 3+a & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+a & 1 \end{array}\right].$$

.... (5 točk)

Rang bo manjši od 3, če bo kateri od diagonalnih elementov enak 0 (determinanta je enaka produktu lastnih vrednosti in pri zgornje trikotni matriki lahko lastne vrednosti preberemo z diagonale). Matrika torej ni obrnljiva pri $a \in \{0, -1\}$. .... (1 točka)

Pri $a = 0$ dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz pogojev $z = 0$ in $x = -2y$ sklepamo, da so vektorji v $N(A)$ v tem primeru oblike $[x, -2x, 0]^\mathsf{T}$. Ena možna baza za $N(A)$ je torej $\{[1, -2, 0]^\mathsf{T}\}$. .... (2 točki)

Pri $a = -1$ dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz pogojev $x = -3z$ in $y = z$ razberemo, da so vektorji v $N(A)$ v tem primeru oblike $[-3z, z, z]^\mathsf{T}$. Za bazo lahko izberemo npr. $\{[-3, 1, 1]^\mathsf{T}\}$. .... (2 točki)

c) (10) Ali ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ v primerih, ko A nima inverza, rešitve? V primeru, da ima, izrazi vse rešitve.

Rešitev: Če v zadnji korak Gaussove eliminacije iz prejšnje točke vstavimo $a = 0$, dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.... (3 točke)

oziroma pogoja $z = 1$ ter $x = -2y$. Rešitve so torej vektorji oblike $[-2y, y, 1]^\mathsf{T}$ za poljuben $y \in \mathbb{R}$. .... (3 točke)

Pri $a = -1$ dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Iz zadnje vrstice sklepamo, da je v tem primeru sistem protisloven in nima rešitev. ... (4 točke)

2. naloga (25 točk)

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) (15) Poišči ortonormirano bazo za stolpčni prostor matrike A; $C(A)$.

Rešitev: Označimo $\vec{a}_1 = [1,1,1,1]^\mathsf{T}$, $\vec{a}_2 = [3,-1,3,-1]^\mathsf{T}$, $\vec{a}_3 = [1,1,-1,3]^\mathsf{T}$. Na $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ naredimo Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\vec{u}_2 &= \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \\
\vec{u}_3 &= \vec{a}_3 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{8}{16}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

....(2+4+6 točk)

Vektorje $\vec{u}_i$ še normiramo in dobimo ortonormirano bazo $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$, kjer je

$$\vec{q}_1 = \tfrac{1}{2}[1,1,1,1]^\mathsf{T}, \ \vec{q}_2 = \tfrac{1}{2}[1,-1,1,-1]^\mathsf{T}, \ \vec{q}_3 = \tfrac{1}{2}[1,-1,-1,1]^\mathsf{T}.$$

....(3 točke)

b) (5) Poišči ortonormirano bazo za $C(A)^\perp$.

Rešitev: Velja $C(A)^\perp = N(A^\mathsf{T})$. ....(2 točki)
Naredimo Gaussovo eliminacijo na A^T:

$$A^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

....(2 točki)

Vektorji, ki ležijo v $N(A^\mathsf{T})$, so torej oblike $[-w,-w,w,w]^\mathsf{T}$. Ortonormirana baza za $N(A^\mathsf{T}) = C(A)^\perp$ je torej $\{\vec{q}_4\}$, kjer je

$$\vec{q}_4 = \tfrac{1}{2}[-1,-1,1,1]^\mathsf{T}.$$

....(1 točka)

c) (5) Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\vec{v} = [0,1,-4,1]^\mathsf{T}$ na $C(A)$.

Rešitev: Projekcijo na $C(A)$ dobimo tako, da od vektorja $\vec{v}$ odštejemo njegovo projekcijo na $C(A)^\perp$ in dobimo

$$\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{q}_4)\vec{q}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} - (-2) \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

....(5 točk)

3. naloga (35 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) (10) Preveri, da je $\vec{v} = [0, 1, -1, 1]^{\mathsf{T}}$ lastni vektor za A. Kateri lastni vrednosti pripada?

Rešitev: Ker je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

. . . . (5 točk)

je $\vec{v}$ lastni vektor matrike A pri lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$. . . . . (5 točk)

b) (15) Poišči bazo lastnega podprostora za lastno vrednost 3.

Rešitev: Ker je

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

. . . . (5 točk)

so lastni vektorji pri lastni vrednosti $\lambda_2 = 3$ oblike $[x, 2x - w, w, w]^{\mathsf{T}}$. . . . . (5 točk)

Bazo za lastni podprostor tako tvorita npr. vektorja $[1, 2, 0, 0]^{\mathsf{T}}$ in $[0, -1, 1, 1]^{\mathsf{T}}$. . . . . (5 točk)

c) (10) Izkaže se, da ima matrika A le dve različni lastni vrednosti (tega ni potrebno preverjati). Ali je A možno diagonalizirati? Če je diagonalizabilna, poišči P in D (P^{-1} ni potrebno računati), sicer pa utemelji, zakaj ni.

Rešitev: Zgoraj smo videli, da je $\operatorname{rang}(A - 3I) = 2$ in imamo pri $\lambda_2 = 3$ dva linearno neodvisna lastna vektorja. Ker je

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

je $\operatorname{rang}(A - I) = 3$. To pomeni, da imamo pri $\lambda_1 = 1$ samo en lastni vektor (do skalarnega večkratnika natančno). . . . . (5 točk)

Ker drugih lastnih vrednosti ni, imamo skupno samo 3 linearno neodvisne lastne vektorje, zato ta 4×4 matrika ni diagonalizabilna. . . . . (5 točk)