Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Linearna algebra: 1. kolokvij

10. april 2019

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Dane so točke $A(3,2,1)$, $B(3,0,-1)$ in $C(1,1,1)$ ter premica p z enačbo

$$p : \frac{x-4}{2} = -y - 2 = z - 1.$$

a) (8) Izračunaj ploščino trikotnika $\triangle ABC$.

Rešitev: Vektorski produkt

$$\vec{v} = (\vec{r_B} - \vec{r_A}) \times (\vec{r_C} - \vec{r_A}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ima dolžino, ki je enaka ploščini paralelograma napetega na A, B in C. Ploščina trikotnika je tako

$$\frac{\|\vec{v}\|}{2} = 3.$$

b) (8) Določi enačbo ravnine Σ, ki vsebuje A in p.

Rešitev: Iz enačbe premice preberemo vektor in točko na premici

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \vec{r_0} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Za normalo iskane premice lahko vzamemo vektorski produkt

$$\vec{n} = \vec{p} \times (\vec{r_0} - \vec{r_A}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Enačba ravnine je potem

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{r_A}$$

oziroma

$$4x + y - 7z = 7$$

c) (9) Izračunaj projekcijo točke B na premico p.

Rešitev: En način je, da projiciramo vektor $\vec{r_B} - \vec{r_0}$ na vektor $\vec{p}$ in rezultat prištejemo krajevnemu vektorju $\vec{r_0}$ (pomaga, če narišemo skico):

$$\vec{r_{B'}} = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r_B} - \vec{r_0})}{\vec{p} \cdot \vec{p}} \vec{p} + \vec{r_0} = \frac{-6}{6} \vec{p} + \vec{r_0} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. naloga (20 točk)

Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1, \\ y + 2z &= -1, \\ 3x + y + (3a^2 - 6)z &= 4. \end{aligned}$$

a) (8) Sistem zapiši v obliki $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Za katere a sistem *ni* rešljiv?
Rešitev: Velja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3a^2 - 6 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Na razširjeni matriki sistema $[A|\mathbf{b}]$ naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah in dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3a^2 - 6 & 4 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & 2 \end{array}\right].$$

Če bo $a^2 - 4 = 0$, bo zadnja enačba protislovna in sistem ne bo imel rešitev. Torej je $a = \pm 2$.

b) (7) Poišči rešitve sistema pri $a = -\sqrt{2}$.
Rešitev: Iz zgornje trikotne oblike sistema, ki smo jo dobili v prejšnji točki, zlahka izrazimo

$$z = \frac{2}{a^2 - 4}, \quad y = -1 - \frac{4}{a^2 - 4} \quad \text{in} \quad x = \frac{1}{3}\left(-1 - \frac{8}{a^2 - 4}\right).$$

Če je $a = -\sqrt{2}$, je $a^2 = 2$ in zato

$$z = -1, \quad y = 1 \quad \text{in} \quad x = 1.$$

Seveda pa lahko do istega rezultata pridemo tudi tako, da ponovno naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah na konkretni razširjeni matriki:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right].$$

Iz zadnje vrstice takoj preberemo $z = -1$, vstavimo v predzadnjo in dobimo $y = 1$ in iz prve še $x = 1$.

c) (5) Pri katerem a, je $y = 3$ rešitev sistema?
Rešitev: Iz $y = -1 - \frac{4}{a^2-4}$ in pogoja $y = 3$ dobimo

$$\begin{aligned} -1 - \frac{4}{a^2 - 4} &= 3, \\ \frac{4}{a^2 - 4} &= -4, \\ \frac{1}{a^2 - 4} &= -1, \\ a^2 - 4 &= -1, \\ a^2 &= 3, \\ a &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

3. naloga (25 točk)

Rešujemo matrično enačbo

$$AXB = AX + C$$

za dane matrike A, B in C.

a) (9) Koliko rešitev ima ta enačba, če sta A in $B-I$ obrnljivi matriki? Kako se v tem primeru izrazi X?

Rešitev: Enačbo lahko zapišemo v obliki

$$AX(B-I) = C.$$

V primeru, da imata omenjeni matriki inverza lahko edino rešitev zapišemo kot

$$X = A^{-1}C(B-I)^{-1}.$$

b) (16) Poišči vse rešitve za primer

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = 3I \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 6 & 2 & -2 \\ 14 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Za primer $B = 3I$ se enačba

$$AX\,3I = AX + C$$

poenostavi v

$$AX = C/2.$$

Ne glede na to, ali je A obrnljiva matrika, lahko vse morebitne rešitve enačbe dobimo z Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki

$$\left[\ A \;\middle|\; \tfrac{C}{2}\ \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 7 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Od tod obenem vidimo, da A ni obrnljiva matrika (in ne bi mogli uporabiti formule iz prejšnje točke tudi če bi hoteli) in da ima enačba neskončno rešitev. Vsako rešitev lahko zapišemo kot

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r & s & t \end{bmatrix}$$

za neke vrednosti parametrov $r, s, t \in \mathbb{R}$.

4. naloga (30 točk)

Naj bo $\mathbf{e} = [1, -1]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^2$ in naj bo $W \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ podmnožica vseh matrik $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, za katere velja

$$X\mathbf{e} = -X^{\mathsf{T}}\mathbf{e}.$$

a) (5) Ali je $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ vsebovana v W? Ali je $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ vsebovana v W?

Rešitev: Ker velja $A\mathbf{e} = [-3, -3]^{\mathsf{T}} = -A^{\mathsf{T}}\mathbf{e}$, je $A \in W$. Ker $B\mathbf{e} = [7, -1]^{\mathsf{T}} \neq -B^{\mathsf{T}}\mathbf{e} = [-1, 7]^{\mathsf{T}}$, B ni vsebovana v W.

b) (10) Preveri, da je W vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Rešitev: Naj bosta $X, Y \in W$, tj. $X\mathbf{e} = -X^{\mathsf{T}}\mathbf{e}$ in $Y\mathbf{e} = -Y^{\mathsf{T}}\mathbf{e}$, ter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tedaj je

$$-(\alpha X + \beta Y)^{\mathsf{T}}\mathbf{e} = \alpha(-X^{\mathsf{T}}\mathbf{e}) + \beta(-Y^{\mathsf{T}}\mathbf{e}) = \alpha X\mathbf{e} + \beta Y\mathbf{e} = (\alpha X + \beta Y)\mathbf{e},$$

torej $\alpha X + \beta Y \in W$ in W je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

c) (10) Poišči bazo za W in določi dimenzijo W.

Rešitev: Pišimo $X = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Tedaj iz $X\mathbf{e} = -X^{\mathsf{T}}\mathbf{e}$ dobimo

$$\begin{bmatrix} a - b \\ c - d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - a \\ d - b \end{bmatrix}.$$

Od tod sledi $a = d = \frac{b+c}{2}$ in matrike $X \in W$ so oblike

$$X = \begin{bmatrix} \frac{b+c}{2} & b \\ c & \frac{b+c}{2} \end{bmatrix} = \frac{b}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{c}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ena možna baza za W je

$$\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$\dim W = 2$.

d) (5) Izrazi tiste od matrik iz (a), ki so vsebovane v W, v izbrani bazi za W iz (c).

Rešitev: Če želimo, da je A zapisana v taki obliki kot X v (c) delu, mora veljati $b = 5$ in $c = -1$, torej

$$A = \frac{5}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$