2. kolokvij iz Linearne algebre
(Ljubljana, 1. 6. 2012)

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega ali dveh A4 listov s formulami. Rezultati bodo objavljeni na strani `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Podatke v tabeli

$$\begin{array}{ccccc} x_i & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ y_i & -1 & 2 & 4 & 5 \end{array}$$

bi radi aproksimirali s funkcijo oblike
$$f(x) = a + \frac{b}{x}.$$
Določi konstanti a in b, da bo $f(x_i)$ najboljša aproksimacija za y_i po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev: Uporabimo metodo najmanjših kvadratov in sestavimo normalni sistem
$$A^TAx = A^Tb \tag{1}$$
za matriko
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1^{-1} \\ 1 & (\frac{1}{2})^{-1} \\ 1 & (\frac{1}{3})^{-1} \\ 1 & (\frac{1}{4})^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$
in desne strani $b = [-1, 2, 4, 5]^T$. Matrika sistema (1) je enaka
$$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix},$$
desne strani pa
$$A^Tb = \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \end{pmatrix}.$$
Sistem rešimo z Gaussovo eliminacijo in dobimo
$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 10 \\ 10 & 30 & 35 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
in rešitev $b = 2$ in $a = \frac{1}{2}(5 - 5a) = -\frac{5}{2}$.

2. Vektorji

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ter \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

so linearno neodvisni. (Tega ni treba preverjati.) Poišči ortonormirano bazo vektorskega podprostora v $\mathbb{R}^4$, ki ga ti vektorji razpenjajo. Poišči še matriko ortogonalne projekcije na ta podprostor.

Rešitev: Ortonormirano bazo poiščemo z Gram-Smidtovim postopkom. Najprej poiščemo ortogonalno bazo $\{v_1, v_2, v_3\}$. Izberemo prvi vektor
$$v_1 = u_1$$

in

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Naslednji vektor v_2 izberemo kot linearno kombinacijo

$$v_2 = a v_1 + b u_2,$$

tako da velja

$$v_1 \cdot v_2 = 0.$$

Dobimo naslednjo enačbo za a in b

$$v_1 \cdot v_2 = a v_1 \cdot v_1 + b v_1 \cdot u_2 = 4a + 6b = 0$$

in izberemo rešitev $a = 3$ in $b = -2$. Naslednji vektor v bazi $\{v_i\}$ je

$$v_2 = 3v_1 - 2u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Namesto v_2, lahko izberemo tudi $v_2/5$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad q_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tretji vektor v bazi izberemo kot linearn kombinacijo

$$v_3 = a v_1 + b v_2 + c u_3,$$

tako da so izpolnjene enačbe

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_3 &= 4a + 4c = 0 \\ v_2 \cdot v_3 &= 4b + 4c = 0 \end{aligned}$$

in kot rešitev lahko izberemo $c = 1$, b=-1 in $a = -1$. Tretji vektor je enak

$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 - 1 + 4 \\ -1 + 1 - 2 \\ -1 + 1 + 2 \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad q_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Če stolpce q_1, q_2 in q_3 postavimo v matriko Q, dobimo ortogonalno porojekcijo kot

$$P = QQ^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad in \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči determinanto matrike X, ki je rešitev enačbe

$$A X = B.$$

Rešitev: Seveda se hočemo na vsak način izogniti reševanju sistema, zato uporabimo lastnosti determiniante (multilplikativnost) in dobimo enačbo

$$\det(AX) = \det A \cdot \det X = \det B.$$

Determinanta X je torej enaka

$$\det X = \frac{\det B}{\det A}.$$

Z determinanto matrike A ni veliko dela, saj je matrika zgornje trikotna in je determinanta enaka produktu diagonalnih elementov $\det A = 4$. Determinatno B pa poiščemo z Gaussovo eliminacijo

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Determinanta matrike X je enaka 1.

4. Podana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diagonaliziraj matriko A in izračunaj A^{2012}.

Rešitev: Matriko diagonaliziramo, tako da poiščemo lastne vrednosti.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda),$$

lastne vrednosti so ničle $\det(A - \lambda I)$, se pravi $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = -1$. Poiščemo še lastne vektorje za vse tri lastne vrednosti. Za $\lambda = 0$, rešitev lahko uganemo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Za $\lambda = 1$, rešimo sistem

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in lastni vektor je

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podobno za $\lambda = -1$, rešimo sistem

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in lastni vektor je

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Matriko A lahko diagonaliziramo $A = S\Lambda S^{-1}$, kjer je S matrika sestavljena iz lastnih vektorjev

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Potenco A^{2012} je sedaj preprosto izračunati

$$A^{2012} = (S\Lambda S^{-1})^{2012} = S\Lambda S^{-1} S\Lambda ... S^{-1} S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^{2012} S^{-1},$$

Inverzno matrike S^{-1} sploh ni treba izračunati, ampak le rešimo sistem

$$A^{2012} S = S\Lambda^{2012}. \tag{2}$$

Matrika $S\Lambda^{2012}$ je enaka

$$S\Lambda^{2012} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Celotno enačbo (2) transponiramo in rešujemo matrični sistem $S^{\,T}(A^{2012})^T = (S\Lambda^{2012})^T$. Razširjena matrika sistema je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

To pomeni, da je

$$A^{2012} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{Vse odgovore dobro utemelji!}}$