

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Linearna algebra: računski izpit

5. september 2023

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na ucilnica.fri.uni-lj.si. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Dani sta točki $A(1, -1, -3)$ in $B(-1, 2, 2)$ ter premica $p : 1 + x = y = z - 4$.

a) (8) Določi enačbo ravnine Σ , ki je pravokotna na daljico \overline{AB} in poteka skozi njeno razpolovišče.

b) (9) Poišči enačbo ravnine Π , ki je vzporedna z ravnino Σ in je od nje oddaljena za $\sqrt{38}$ enot. Ali obstaja le ena taka ravnina? Utemelji.

c) (8) Izračunaj presečišče S ravnine $\Gamma : 5x - 2y + 4z = -3$ in premice p ter določi enačbo premice q , ki poteka skozi S je pravokotna na ravnino Γ .

2. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha - 3 \\ \alpha - 3 \\ \alpha - 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} \beta - 1 \\ \beta \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix},$$

kjer sta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) (10) Poišči bazo stolpčnega prostora matrike A . Kolikšna je dimenzija ničelnega prostora matrike A ?

b) (8) Za katere $\alpha \in \mathbb{R}$ je sistem $A\vec{x} = \vec{b}_1$ rešljiv? Za dobljen $\alpha \in \mathbb{R}$ zapiši vse rešitve tega sistema.

c) (7) Poišči tak $\beta \in \mathbb{R}$, da bo \vec{b}_2 element stolpčnega prostora matrike A .

3. naloga (25 točk)

Preslikavi $\phi, \psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sta dani s predpisoma

$$\phi([x, y, z]^T) = [|x|, 0, |y|]^T \text{ ter } \psi(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \vec{v}) \vec{v}.$$

a) (15) Pokaži, da je preslikava ψ linearna, preslikava ϕ pa ne.

b) (10) Za $\vec{v} = [1, 2, 3]^T$ poišči matriko, ki pripada preslikavi ψ glede na standardno bazo prostora \mathbb{R}^3 .

4. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) (15) Poišči vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A .

b) (10) Izberi ortogonalna lastna vektorja matrike A ter ju označi z \vec{u} in \vec{v} . Dopolni množico $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ do ortogonalne baze prostora \mathbb{R}^3 .