Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

3. IZPIT, LINEARNA ALGEBRA TEORETIČNI DEL

16. avgust 2021

(Na teoretičnem delu je 7 nalog, ki so skupaj vredne 56 točk. Za 100% je potrebno doseči 50 točk.)

1. (8 točk) V $\mathbb{R}^3$ je podana ravnina $\Sigma : x + 2y + 2z = 0$.

   A. Zapišite nek enotski vektor, ki leži v ravnini Σ.

   Primeri vektorjev na Σ:
   $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
   Da dobimo enotske vektorje, jih je potrebno deliti s svojo dolžino:
   $\vec{a}_N = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   B. Zapišite nek enotski vektor, ki je pravokoten na ravnino Σ.

   $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \perp \Sigma$, za to je enotski vektor, ki je pravokoten na Σ
   $\vec{n}_0 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. (8 točk) Za dane vektorje $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_7 \in \mathbb{R}^{13}$ naj velja $\vec{v}_6 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3 - 2\vec{v}_5 \neq \vec{0}$. Določite vse možne vrednosti za dimenzijo linearne ogrinjače $\mathcal{L}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_7\}$.

   $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_7$ so linearno odvisni
   $\Rightarrow \dim \mathcal{L}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_7\} \leq 6$

   vsi vektorji niso enaki $\vec{0}$, zato
   $\dim \mathcal{L}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_7\} \neq 0$

   Sledi:
   $\dim \mathcal{L}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_7\} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3. Naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ enotski vektorji v $\mathbb{R}^n$ in naj bosta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ortogonalna. Zapišite pravokotno projekcijo vektorja $\vec{c}$ na linearno ogrinjačo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

   $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ je ONB $\mathcal{L}\{\vec{a}, \vec{b}\} =: U$
   $\Rightarrow \mathrm{proj}_U \vec{c} = (\vec{c}^T \vec{a})\, \vec{a} + (\vec{c}^T \vec{b})\, \vec{b}$

   Druga možnost: $Q = \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}^T \\ \vec{b}^T \end{bmatrix}$ je matrika projekcije na $\mathcal{L}\{\vec{a}, \vec{b}\} = U$
   $\Rightarrow \mathrm{proj}_U \vec{c} = Q\vec{c} = (\vec{a}\vec{a}^T + \vec{b}\vec{b}^T)\vec{c} = \vec{a}\,\vec{a}^T\vec{c} + \vec{b}\,\vec{b}^T\vec{c}$

   (če uporabite asociativnost matričnega množenja, se reda dobite) isti rezultat kot zgoraj :)

4. (8 točk) Zapišite primer kvadratnih matrik A in B, za kateri velja $AB = 0$ in $BA \neq 0$.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. (8 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obrnljiva matrika. Pokažite, da je tudi matrika A^3 obrnljiva.

$A^3 = A \cdot A \cdot A$ je produkt obrnljivih matrik, torej obrnljiva.

Ali pa: $A^3 \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} = I_n$

obstaja, saj je A obrnljiva

$\Rightarrow A^3$ je obrnljiva in $(A^3)^{-1} = (A^{-1})^3$.

Ali pa: $\det A \neq 0 \Rightarrow \det(A^3) = (\det A)^3 \neq 0 \Rightarrow A^3$ je obrnljiva

6. (8 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ diagonalizabilna matrika, za katero velja, da je vsaka njena lastna vrednost enaka bodisi 0 bodisi -1. Kaj lahko poveste o matriki $A^2 + A^3$?

$A = PDP^{-1}$, kjer $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$ in $d_i \in \{0, -1\}$

d_i	d_i^2	d_i^3	$d_i^2 + d_i^3$
0	0	0	0
-1	1	-1	0

$\Rightarrow A^2 = PD^2P^{-1}$ in $A^3 = PD^3P^{-1}$

$\Rightarrow A^2 + A^3 = P(D^2 + D^3)P^{-1}$

$D^2 + D^3 = \begin{bmatrix} d_1^2 + d_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^2 + d_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3^2 + d_3^3 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow A^2 + A^3 = P0P^{-1} = 0$

7. (8 točk) Katere od naslednjih trditev so pravilne za poljubni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, za kateri velja $\det A > 0$ in $\det B = 0$?

A. A^3 je obrnljiva

B. AB je obrnljiva

C. $\operatorname{rang}(A) = 5$

D. $\operatorname{rang}(B) = 5$

E. A ima le pozitivne lastne vrednosti

F. 0 je lastna vrednost matrike A

G. 0 je singularna vrednost matrike B

H. Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ ima rešitev za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$

(Obkrožite vse pravilne odgovore. Če boste obkrožili **vse** pravilne odgovore, a nobenega napačnega, boste dobili 8 točk. Če boste obkrožili vsaj polovico pravilnih odgovorov, a nobenega napačnega, boste dobili 4 točk. V nasprotnem primeru pa 0 točk. Pri tej nalogi odgovora ni potrebno utemeljevati.)

4 OK 8 tč
3 OK 6 tč
2 OK 4 tč
1 OK 2 tč

4 OK 1 X 4 tč
3 OK 1 X 2 tč