Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ____________________

1. IZPIT, LINEARNA ALGEBRA, TEORETIČNI DEL
8. junij 2023

(Na teoretičnem delu je 7 nalog, ki so skupaj vredne 100 točk.)

1. (20 točk) Kot običajno, označimo s simbolom $\cdot$ skalarni produkt vektorjev, ter s simbolom $\times$ vektorski produkt vektorjev. Ali obstajata vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, za katera veljajo naslednje lastnosti?
   - Če da, obkrožite DA, v desnem stolpcu pa zapišite primer takšnih vektorjev.
   - Če ne, obkrožite NE in v desnem stolpcu to tudi utemeljite.

	Ali obstajata takšna vektorja?	Primer, če je odgovor "DA". Utemeljitev, če je odgovor "NE".
enotska vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$, za katera je $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$	DA NE	
nekolinearna $\vec{u}$ in $\vec{v}$, za katera sta vektorja $\vec{u} \times \vec{v}$ in $3\vec{v}$ linearno odvisna	DA NE	
različna neničelna linearno odvisna vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ v ortogonalnem komplementu ravnine $x-2y+3z=0$	DA NE	
različna neničelna linearno neodvisna vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ v ortogonalnem komplementu premice $x=y=z$	DA NE	

2. (10 točk) Naj bo

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

A. Zapišite primer enotskega vektorja v vektorskem podprostoru U, ki ni kolinearen niti z $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ niti z $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

B. Zapišite primer ortogononalne matrike $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, katere prva dva stolpca ležita v U.

3. (10 točk) Naj za linearno preslikavo $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ velja

$$\varphi(\vec{e}_1) = \varphi(\vec{e}_5) \ \text{ in } \ \varphi(\vec{e}_2) = \varphi(\vec{e}_3) = \varphi(\vec{e}_4),$$

kjer je $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^5$. Določite vse možne vrednosti dimenzije jedra preslikave φ.

4. (10 točk) Pokažite, da za matriko $A \in \mathbb{R}^{(n+2023)\times n}$ velja $\dim N(A^\top) = \dim N(A) + 2023$.

5. (20 točk) Simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ ima dvodimenzionalen ničelni prostor in velja

$$\operatorname{rang}(A+I) = 3,\ \operatorname{rang}(A+2I) = 4 \ \text{ ter } \ \operatorname{rang}(A+3I) = 5.$$

Izračunajte (in utemeljite):

A. $\operatorname{rang}(A)$.

B. $\dim C(A)^\perp$.

C. lastne vrednosti matrike A in njihove večkratnosti.

D. singularne vrednosti matrike A in njihove večkratnosti.

6. (10 točk) Naj bosta matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizabilni in imata enake lastne vrednosti (vključno z njihovimi večkratnostmi). Pokažite, da sta si matriki A in B podobni.

7. (20 točk) Katere od naslednjih trditev so resnične za poljubni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, za kateri velja $\det(A) = 0$ in $\det(B) = 4$?

   A. Matrika AB je obrnljiva.
   B. $A - A^{\mathsf{T}}$ je obrnljiva matrika.
   C. $A - A^{\mathsf{T}}$ je simetrična matrika.
   D. $\det(A + B) = 4$.
   E. $\det(-B) = 4$
   F. $\det(-B^2) = -16$
   G. B je diagonalizabilna.
   H. A ima same različne lastne vrednosti.
   I. A ima vsaj eno lastno vrednost enako 0.
   J. B ima vsaj eno lastno vrednost enako 4.
   K. B ima vsaj eno pozitivno realno lastno vrednost.
   L. Za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$ je sistem $Ax = \vec{b}$ rešljiv.
   M. Za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$ je sistem $Bx = \vec{b}$ rešljiv.
   N. Karakteristični polinom matrike A ne more biti $\Delta_A(x) = -x^5$.

   (Obkrožite vse pravilne odgovore. Jasno označite. Za vsak napačno obkrožen odgovor boste dobili -2 točki. Pri tej nalogi odgovorov ni potrebno utemeljevati.)

Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

1. IZPIT, LINEARNA ALGEBRA, TEORETIČNI DEL
8. junij 2023

(Na teoretičnem delu je 7 nalog, ki so skupaj vredne 100 točk.)

1. (20 točk) Kot običajno, označimo s simbolom $\cdot$ skalarni produkt vektorjev, ter s simbolom $\times$ vektorski produkt vektorjev. Ali obstajata vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, za katera veljajo naslednje lastnosti?
   - Če da, obkrožite DA, v desnem stolpcu pa zapišite primer takšnih vektorjev.
   - Če ne, obkrožite NE in v desnem stolpcu to tudi utemeljite.

	Ali obstajata takšna vektorja?	Primer, če je odgovor "DA". Utemeljitev, če je odgovor "NE".
enotska vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$, za katera je $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$	DA NE	
nekolinearna $\vec{u}$ in $\vec{v}$, za katera sta vektorja $\vec{u} \times \vec{v}$ in $3\vec{v}$ linearno odvisna	DA NE	
različna neničelna linearno odvisna vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ v ortogonalnem komplementu ravnine $x-2y+3z=0$	DA NE	
različna neničelna linearno neodvisna vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ v ortogonalnem komplementu premice $x=y=z$	DA NE	

2. (10 točk) Naj bo

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

A. Zapišite primer enotskega vektorja v vektorskem podprostoru U, ki ni kolinearen niti z $\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ niti z $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

B. Zapišite primer ortogononalne matrike $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, katere prva dva stolpca ležita v U.

3. (10 točk) Naj za linearno preslikavo $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ velja

$$\varphi(\vec{e}_1) = \varphi(\vec{e}_2) \text{ in } \varphi(\vec{e}_3) = \varphi(\vec{e}_4) = \varphi(\vec{e}_5),$$

kjer je $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^5$. Določite vse možne vrednosti dimenzije jedra preslikave φ.

4. (10 točk) Pokažite, da za matriko $A \in \mathbb{R}^{(n+2023)\times n}$ velja $\dim N(A^{\mathsf{T}}) = \dim N(A) + 2023$.

5. (20 točk) Simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ ima dvodimenzionalen ničelni prostor in velja

$$\operatorname{rang}(A+I) = 3,\ \operatorname{rang}(A-2I) = 4 \ \text{ ter } \ \operatorname{rang}(A+3I) = 5.$$

Izračunajte (in utemeljite):

A. $\operatorname{rang}(A)$.

B. $\dim C(A)^{\perp}$.

C. lastne vrednosti matrike A in njihove večkratnosti.

D. singularne vrednosti matrike A in njihove večkratnosti.

6. (10 točk) Naj bosta matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizabilni in imata enake lastne vrednosti (vključno z njihovimi večkratnostmi). Pokažite, da sta si matriki A in B podobni.

7. (20 točk) Katere od naslednjih trditev so resnične za poljubni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, za kateri velja $\det(A) = 0$ in $\det(B) = 4$?

   A. Matrika AB je obrnljiva.
   B. $A - A^{\mathsf{T}}$ je simetrična matrika.
   C. $A - A^{\mathsf{T}}$ je obrnljiva matrika.
   D. $\det(A + B) = 4$.
   E. $\det(-B) = -4$
   F. $\det(-B^2) = 16$
   G. B je diagonalizabilna.
   H. A ima same različne lastne vrednosti.
   I. A ima vsaj eno lastno vrednost enako 0.
   J. B ima vsaj eno lastno vrednost enako 4.
   K. B ima vsaj eno pozitivno realno lastno vrednost.
   L. Za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$ je sistem $Ax = \vec{b}$ rešljiv.
   M. Za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$ je sistem $Bx = \vec{b}$ rešljiv.
   N. Karakteristični polinom matrike A ne more biti $\Delta_A(x) = -x^5$.

   (Obkrožite vse pravilne odgovore. Za vsak napačno obkrožen odgovor boste dobili -2 točki. Pri tej nalogi odgovorov ni potrebno utemeljevati.)

Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

1. IZPIT, LINEARNA ALGEBRA, TEORETIČNI DEL
8. junij 2023

(Na teoretičnem delu je 7 nalog, ki so skupaj vredne 100 točk.)

1. (20 točk) Kot običajno, označimo s simbolom $\cdot$ skalarni produkt vektorjev, ter s simbolom $\times$ vektorski produkt vektorjev. Ali obstajata vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, za katera veljajo naslednje lastnosti?
   - Če da, obkrožite DA, v desnem stolpcu pa zapišite primer takšnih vektorjev.
   - Če ne, obkrožite NE in v desnem stolpcu to tudi utemeljite.

	Ali obstajata takšna vektorja?	Primer, če je odgovor "DA". Utemeljitev, če je odgovor "NE".
enotska vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$, za katera je $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$	DA NE	
nekolinearna $\vec{u}$ in $\vec{v}$, za katera sta vektorja $\vec{u} \times \vec{v}$ in $3\vec{v}$ linearno odvisna	DA NE	
različna neničelna linearno odvisna vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ v ortogonalnem komplementu ravnine $x-2y+3z=0$	DA NE	
različna neničelna linearno neodvisna vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ v ortogonalnem komplementu premice $x=y=z$	DA NE	

2. (10 točk) Naj bo

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

A. Zapišite primer enotskega vektorja v vektorskem podprostoru U, ki ni kolinearen niti z $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ niti z $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

B. Zapišite primer ortogononalne matrike $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, katere prva dva stolpca ležita v U.

3. (10 točk) Naj za linearno preslikavo $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ velja

$$\varphi(\vec{e}_1) = \varphi(\vec{e}_2) \ \text{ in } \ \varphi(\vec{e}_3) = \varphi(\vec{e}_4) = \varphi(\vec{e}_5),$$

kjer je $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^5$. Določite vse možne vrednosti dimenzije jedra preslikave φ.

4. (10 točk) Pokažite, da za matriko $A \in \mathbb{R}^{(n+2023)\times n}$ velja $\dim N(A^{\mathsf{T}}) = \dim N(A) + 2023$.

5. (20 točk) Simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ ima dvodimenzionalen ničelni prostor in velja

$$\operatorname{rang}(A+I) = 5,\ \operatorname{rang}(A+2I) = 4 \ \text{ ter } \ \operatorname{rang}(A+3I) = 3.$$

Izračunajte (in utemeljite):

A. $\operatorname{rang}(A)$.

B. $\dim C(A)^{\perp}$.

C. lastne vrednosti matrike A in njihove večkratnosti.

D. singularne vrednosti matrike A in njihove večkratnosti.

6. (10 točk) Naj bosta matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizabilni in imata enake lastne vrednosti (vključno z njihovimi večkratnostmi). Pokažite, da sta si matriki A in B podobni.

7. (20 točk) Katere od naslednjih trditev so resnične za poljubni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, za kateri velja $\det(A) = 0$ in $\det(B) = 4$?

   A. Matrika AB je obrnljiva.
   B. $A + A^\top$ je simetrična matrika.
   C. $A + A^\top$ je obrnljiva matrika.
   D. $\det(A + B) = 4$.
   E. $\det(-B) = -4$
   F. $\det(-B^2) = 16$
   G. B je diagonalizabilna.
   H. A ima same različne lastne vrednosti.
   I. A ima vsaj eno lastno vrednost enako 0.
   J. B ima vsaj eno lastno vrednost enako 4.
   K. B ima vsaj eno pozitivno realno lastno vrednost.
   L. Za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ je sistem $Ax = \vec{b}$ rešljiv.
   M. Za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ je sistem $Bx = \vec{b}$ rešljiv.
   N. Karakteristični polinom matrike A ne more biti $\Delta_A(x) = x^4$.

   (Obkrožite vse pravilne odgovore. Za vsak napačno obkrožen odgovor boste dobili -2 točki. Pri tej nalogi odgovorov ni potrebno utemeljevati.)