Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ____________________

Drugi izpit iz Linearne algebre
Teoretični del, 26. junij 2024

Vsa vprašanja so enakovredna. Vsako je vredno 1 točko. Za reševanje imate 45 minut. Obkrožite pravilni odgovor in ga **utemeljite**. Za nepravilen odgovor dobite 0 točk, za utemeljitev pravilnega odgovora pa lahko dobite 0 ali 1/4 ali 1/2 ali 3/4 ali 1 točko. Če je utemeljitev povsem napačna, tudi pravilen odgovor ne prinaša točk.

1. Naj bosta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^5$. Naj bo $\dim U = 3$ in naj ima V bazo $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Presek $U \cap V$ je lahko enak trivialnemu podprostoru $\{\vec{0}\}$.

   DA / NE *Utemeljitev:*

2. Matrika $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ je diagonalizabilna.

   DA / NE *Utemeljitev:*

3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ obrnljiva matrika in $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Obstajata vektor $\vec{v} \in \ker B$ in vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, tako da je vektor $\vec{v} \times \vec{u}$ pravokoten na vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   DA / NE *Utemeljitev:*

4. Naj bosta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^3$. Njuna unija

$$U \cup V = \left\{\vec{w} : \quad \vec{w} \in U \text{ ali } \vec{w} \in V\right\}$$

   je tudi vektorski podprostor.

   DA / NE *Utemeljitev:*

5. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ matrika z lastnimi vrednostmi $1+i, 1-i, 3$. Naj bo $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ podobna matriki A. Potem je $\det B^2 = 36$.

   DA / NE *Utemeljitev:*

6. Naj bo A kvadratna realna matrika, ki ni simetrična. Potem ima A *zagotovo* vsaj eno lastno vrednost, ki ni realna.

   DA / NE *Utemeljitev:*

7. Matrika $B \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ s karakteristični polinomom

$$p_B(\lambda) = \lambda^{10} + b_9\lambda^9 + \ldots + b_1\lambda + 1,$$

   kjer so $b_i \in \mathbb{R}$, je obrnljiva.

   DA / NE *Utemeljitev:*

8. Naj bo $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ linearna preslikava, ki je na standardnih baznih vektorjih $\vec{e}_i$ definirana kot

$$L(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad L(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \quad L(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \quad L(\vec{e}_4) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

   Obstaja taka preslikava $\widetilde{L} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, da je kompozitum $L \circ \widetilde{L}$ enak identični preslikavi.

   DA / NE *Utemeljitev:*

9. Obstajajo *neničelni* vektorji $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^5$, ki so si paroma pravokotni, vendar niso linearno neodvisni.

   DA / NE *Utemeljitev:*

10. Naj bo A pravokotna matrika in A^+ njen Moore–Penroseov inverz. Velja $(\ker A)^\perp = \operatorname{im}(A^+)$.

   DA / NE *Utemeljitev:*