Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Drugi izpit iz Linearne algebre
Teoretični del, 26. junij 2024

Vsa vprašanja so enakovredna. Vsako je vredno 1 točko. Za reševanje imate 45 minut. Obkrožite pravilni odgovor in ga **utemeljite**. Za nepravilen odgovor dobite 0 točk, za utemeljitev pravilnega odgovora pa lahko dobite 0 ali 1/4 ali 1/2 ali 3/4 ali 1 točko. Če je utemeljitev povsem napačna, tudi pravilen odgovor ne prinaša točk.

1. Naj bosta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^5$. Naj bo $\dim U = 3$ in naj ima V bazo $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Presek $U \cap V$ je lahko enak trivialnemu podprostoru $\{\vec{0}\}$.

   NE. *Utemeljitev:* Naj bo $\{u_1, u_2, u_3\}$ baza za U. Množica $\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^5$ je linearno odvisna. Zato obstaja netrivialna linearna kombinacija $\sum_{i=1}^3 \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^3 \beta_j v_j = 0$, kjer je zaradi neodvisnosti u_i oz. v_j vsaj en α_i in vsaj en β_j neničeln. Zato je $0 \neq \sum_{i=1}^3 \alpha_i u_i = -\sum_{j=1}^3 \beta_j v_j \in U \cap V$.

2. Matrika $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ je diagonalizabilna.

   DA. *Utemeljitev:* Vsaki lastni vrednosti λ_i pripada vsaj en lastni vektor v_i. Lastne vrednosti so različne, zato obstaja baza iz lastnih vektorjev in matrika A je diagonalizabilna.

3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ obrnljiva matrika in $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Obstajata vektor $\vec{v} \in \ker B$ in vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, tako da je vektor $\vec{v} \times \vec{u}$ pravokoten na vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   DA. *Utemeljitev:* Za $\vec{v} = \vec{0} \in \ker B$ in poljuben $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ velja $\vec{v} \times \vec{u} = \vec{0}$. Ničelni vektor pa je pravokoten na vsak vektor.

4. Naj bosta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^3$. Njuna unija

   $$U \cup V = \left\{\vec{w} : \quad \vec{w} \in U \text{ ali } \vec{w} \in V\right\}$$

   je tudi vektorski podprostor.

   NE. *Utemeljitev:* Za $U = \mathrm{Lin}\{e_1\}$ in $V = \mathrm{Lin}\{e_2\}$, kjer sta $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, unija $U \cup V$ ni zaprta za seštevanje. Ne vsebuje npr. vektorja $e_1 + e_2$.

5. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ matrika z lastnimi vrednostmi $1 + i, 1 - i, 3$. Naj bo $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ podobna matriki A. Potem je $\det B^2 = 36$.

   DA. *Utemeljitev:* Podobne matrike imajo iste lastne vrednosti. Zato velja

   $$\det B = \det A = (1 + i)(1 - i)3 = 6.$$

   Torej je $\det B^2 = (\det B)^2 = 36$.

6. Naj bo A kvadratna realna matrika, ki ni simetrična. Potem ima A *zagotovo* vsaj eno lastno vrednost, ki ni realna.

   NE. *Utemeljitev:* Matrika $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ni simetrična, vendar ima le lastni vrednosti $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$.

7. Matrika $B \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ s karakteristični polinomom

$$p_B(\lambda) = \lambda^{10} + b_9\lambda^9 + \ldots + b_1\lambda + 1,$$

   kjer so $b_i \in \mathbb{R}$, je obrnljiva.

   DA. *Utemeljitev:* Velja $p_B(0) = \det(B - 0I) = \det B = 1$. Zato je B obrnljiva.

8. Naj bo $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ linearna preslikava, ki je na standardnih baznih vektorjih $\vec{e}_i$ definirana kot

$$L(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad L(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \quad L(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \quad L(\vec{e}_4) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

   Obstaja taka preslikava $\widetilde{L} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, da je kompozitum $L \circ \widetilde{L}$ enak identični preslikavi.

   NE. *Utemeljitev:* Vektor $\vec{e}_4$ ni v $\operatorname{im}(L)$. Torej tudi $\operatorname{im}(L \circ \widetilde{L})$ ne bo vsebovala $\vec{e}_4$ za nobeno preslikavo $\widetilde{L}$.

9. Obstajajo *neničelni* vektorji $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^5$, ki so si paroma pravokotni, vendar niso linearno neodvisni.

   NE. *Utemeljitev:* Naj bo $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ za neke $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Skalarno množimo z v_1 in dobimo

$$\alpha_1 v_1 \cdot v_1 + \alpha_2 v_2 \cdot v_1 + \alpha_3 v_3 \cdot v_1 = \alpha_1 \|v_1\|^2 = 0.$$

   Od tod sledi $\alpha_1 = 0$. Podobno sklepamo še $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Torej so v_1, v_2, v_3 linearno neodvisni.

10. Naj bo A pravokotna matrika in A^+ njen Moore–Penroseov inverz. Velja $(\ker A)^\perp = \operatorname{im}(A^+)$.

    DA. *Utemeljitev:* Naj bo $A = U\Sigma V^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ singularni razcep matrike A. Naj bodo $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ vse neničelne singularne vrednosti A in $V = \begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_m \end{pmatrix}$. Potem je $\ker A = \operatorname{Lin}\{v_{k+1}, \ldots, v_m\}$ in zato $(\ker A)^\perp = \operatorname{Lin}\{v_1, \ldots, v_k\}$. Ker je $A^+ = V\Sigma^+ U^T$ in ima Σ^+ na diagonali $\sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_k^{-1}, 0, \ldots, 0$, sledi $\operatorname{im}(A^+) = \operatorname{Lin}\{v_1, \ldots, v_k\}$.