Prvi izpit iz Linearne algebre
Teoretični del
13. junij 2024

Vsa vprašanja so enakovredna. Vsako je vredno 1 točko. Za reševanje imate 45 minut. Obkrožite pravilni odgovor in ga **utemeljite**. Za nepravilen odgovor dobite 0 točk, za utemeljitev pravilnega odgovora pa lahko dobite 0 ali 1/4 ali 1/2 ali 3/4 ali 1 točko. Če je utemeljitev povsem napačna, tudi pravilen odgovor ne prinaša točk.

1. Obstajajo taka realna števila a, b, c, d, e, da je naslednja matrika ortogonalna:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ c & d & e \end{pmatrix}.$$

   DA. *Utemeljitev:* Za $a = b = c = d = 0$, $e = 1$ je matrika ortogonalna.

2. Stolpci obrnljive matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tvorijo bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^n$.

   DA. *Utemeljitev:* Stolpci obrnljive martike so linearno neodvisni, saj je $\ker A = \{0\}$. Ker jih je n, tvorijo bazo za $\mathbb{R}^n$.

3. Realna matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima same realne lastne vrednosti.

   NE. *Utemeljitev:* Za $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ je $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Zato ima A lastni vrednosti $\pm i$.

4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taka realna matrika, da ima A^2 lastno vrednost $1 + 2i$. Potem je $\det A$ kompleksno število, ki ni realno.

   NE. *Utemeljitev:* Ker je $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$, so vsi sumandi realna števila in $\det A \in \mathbb{R}$.

5. Naj bo $m < n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrika in A^+ njen Moore–Penroseov inverz. Velja $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^+$.

   DA. *Utemeljitev:* Rang matrike je enak številu neničelnih singularnih vrednosti. Matriki A in A^+ pa imata isto število neničelnih singularnih vrednosti. Neničelno število σ je namreč singularna vrednost A natanko tedaj, ko je σ^{-1} singularna vrednost A^+.

6. Obstaja matrika $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$, ki ima neko lastno vrednost $\lambda \neq 0$, A^{10} pa je matrika samih 0.

   NE. *Utemeljitev:* Če je $Av = \lambda v$ za nek $\lambda \neq 0$ in nek neničelni vektor v, potem $A^{10}v = \lambda^{10}v$ ni ničelni vektor in zato A^{10} ni ničelna matrika.

7. Naj bo $n > m$. Obstajata taki matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, da je matrika AB obrnljiva.

   NE. *Utemeljitev:* Velja $n = \dim \ker B + \operatorname{rang} B$. Ker je $\operatorname{rang} B \leq m < n$, sledi $\dim \ker B \geq 1$. Za $v \in \ker B$ pa velja $ABv = A0 = 0$. Torej AB ni obrnljiva.

8. Naj bo $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ injektivna linearna preslikava med vektorskima prostoroma $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$. Naj bodo $v_1, \ldots, v_k$ linearno neodvisni v $\mathbb{R}^m$. Potem so $L(v_1), \ldots, L(v_k)$ linearno neodvisni v $\mathbb{R}^n$.

   DA. *Utemeljitev:* Naj bo $\sum_{i=1}^k \alpha_i L(v_i) = 0$ za neke $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Ker je L linearna, je $L(\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i) = 0$. Ker je L injektivna, sledi $\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0$. Ker so $v_1, \ldots, v_k$ linearno neodvisni, sledi $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Torej so $L(v_1), \ldots, L(v_k)$ linearno neodvisni.

9. Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$, $\cdot$ običajni skalarni produkt in $z, w \in V$ fiksna vektorja. Če za vsak $v \in V$ velja $z \cdot v = w \cdot v$, potem je $z = w$.

   DA. *Utemeljitev:* Iz $z \cdot v = w \cdot v$ sledi $(z - w) \cdot v = 0$ za vsak v. Posebej tudi za $v = z - w$. Torej je $||z - w|| = 0$ in $z - w = 0$.

10. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ naravno število, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrični matriki, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ realna matrika in

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$

   bločna matrika. Obstaja ortonormirana baza za $\mathbb{R}^{2n}$, ki jo sestavljajo lastni vektorji matrike M.

   DA. *Utemeljitev:* Ker je

$$M^T = \begin{pmatrix} A^T & C \\ C^T & B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} = M,$$

   je matrika M simetrična in po spektralnem izreku obstaja ortonormirana baza za $\mathbb{R}^{2n}$, ki jo sestavljajo lastni vektorji matrike M.