Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Naloge	1 – 5	7 – 15	Skupaj	Odstotek
Možne točke:	6	9	15	100
Dosežene točke:				

3. IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE 2018/19

5. september 2019

Splošni napotki:

Izpit vsebuje 15 nalog in obsega 4 strani. Čas za reševanje je 45 minut.

Vsako prepisovanje, pogovarjanje ali uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona, slušalk ali drugih pripomočkov se bo sankcioniralo z odvzemom izpita.

Za vsako od trditev 1 – 5 obkrožite ali drži ali ne drži.
Če drži, utemeljite, zakaj. Če ne drži, zapišite protiprimer.

1. Če je $\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \, ||\vec{b}||$, potem sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna.

   DRŽI NE DRŽI

2. Če sta prvi in drugi stolpec matrike $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ linearno odvisna vektorja, potem matrika A ni obrnljiva.

   DRŽI NE DRŽI

3. Ravnina v $\mathbb{R}^3$, podana z enačbo $x + 2y + 3z = 4$, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.

DRŽI NE DRŽI

4. Če je neničelni vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ pravokotna projekcija vektorja $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ na vektorski podprostor $U \subset \mathbb{R}^n$, potem sta vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ pravokotna.

DRŽI NE DRŽI

5. Za simetrično matriko A velja $N(A) = C(A)^{\perp}$.

DRŽI NE DRŽI

6. Matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ je diagonalizabilna.

DRŽI NE DRŽI

Odgovorite na vsako od vprašanj 7 – 15 in odgovore dobro utemeljite.

7. Naj vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ dolžin $||\vec{a}|| = 2$ in $||\vec{b}|| = 3$ oklepata kot $\frac{\pi}{4}$. Izračunajte skalarni produkt vektorjev $\vec{a} + \vec{b}$ ter $\vec{a} - \vec{b}$.

8. Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{7\times 4}$ štiri linearno neodvisne vrstice. Koliko rešitev ima lahko linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$?

9. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ neničelna matrika in velja $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ter $A \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
Določite vse možne vrednosti za rang matrike A.

10. Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, podana s predpisom

$$\tau\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ z \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zapišite matriko, ki pripada τ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

11. Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva. Ali obstaja obrnljiva matrika $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, za katero velja $AXA + A = 0$?

12. Zapišite primer matrike, ki ima paroma ortogonalne stolpce, vendar ni ortogonalna matrika.

13. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika, za katero velja $A^2 = A$. Pokažite, da je vsak vektor $\vec{y} = A\vec{x} \in C(A)$ lastni vektor matrike A. Določite tudi pripadajočo lastno vrednost.

14. Naj bo A matrika velikosti 3×3, ki ima pri lastni vrednosti 1 lastni vektor $\vec{x} = [1,\ 2,\ 3]^T$ in pri lastni vrednosti -1 lastni vektor $\vec{y} = [3,\ 2,\ 1]^T$. Izračunajte $A^{2019}(\vec{x} + \vec{y})$.

15. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ matrika z lastnimi vrednostmi -1, 1, $\frac{1}{2}$, 2 in 3, za matriko $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ pa velja $\det(B) = 2$. Izračunajte determinanto $\det(AB^T)$.