

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

2. IZPIT

LINEARNA ALGEBRA

17. junij 2020

Splošni napotki:

- Čas pisanja: 105 minut.
- Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci.
- Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Vsako prepisovanje, pogovarjanje ali uporabljanje knjig, zapiskov, prenosnega telefona, slušalk ali drugih pripomočkov se bo sankcioniralo.
- Rešitve, točkovnik in rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*.
- **Vse odgovore dobro utemeljite!** Brez utemeljitve ne dobite točk.

TEORETIČNI DEL

1. (10 točk) Za vsakega od naslednjih pogojev zapišite primer različnih neničelnih vektorjev $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, za katera je posamezni pogoj izpolnjen.

A. $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}\}$ je ortonormirana baza \mathbb{R}^3 .

B. Mešani produkt vektorjev \vec{x}, \vec{y} in $\vec{x} \times \vec{y}$ je enak 0.

C. Rang matrike z vrsticama \vec{x}^T in \vec{y}^T je enak 1.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

2. (5 točk) Naj bodo S_1, S_2, \dots, S_6 linearno neodvisne simetrične 3×3 matrike. Pokažite, da tvorijo bazo vektorskega prostora simetričnih 3×3 matrik.

3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrika ranga n . Za vsako od naslednjih trditev obkrožite ali drži ali ne drži. Svoj odgovor dobro utemeljite.

A. (5 točk) Če je QR razcep matrike A enak $A = QR$, potem je $A^T A = R^T R$.

DRŽI

NE DRŽI

B. (5 točk) Če je $\vec{x} = \vec{x}_0$ najboljši približek rešitve po linearni metodi najmanjših kvadratov linearne sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, potem je $A\vec{x}_0 - \vec{b} \in C(A)$.

DRŽI

NE DRŽI

4. (5 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ takšna matrika, da velja $\dim N(A) = \dim N(A^T)$. Pokažite, da velja $m = n$.

5. (5 točk) Pokažite, da če je matrika A podobna matriki B , potem je matrika A^4 podobna matriki B^4 .

6. (5 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ matrika z lastnimi vrednostmi 1, 2, 3, 4, 5 in z lastnim vektorjem \vec{x} , ki pripada lastni vrednosti 5. Naj bo $B \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ matrika z lastnimi vrednostmi $-1, -2, -3, -4, -5$ in z lastnim vektorjem \vec{x} , ki pripada lastni vrednosti -1 . Pokažite, da je \vec{x} tudi lastni vektor matrike $A^{-1}B$. Kateri lastni vrednosti pripada?

7. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simetrična matrika z dvojno lastno vrednostjo -1 in njej pripadajočima lastnima vektorjema $\vec{v} = [0, 1, 1]^T$ ter $\vec{u} = [1, 1, 0]^T$.

A. (5 točk) Izračunajte $A^{2020} \vec{v}$.

B. (5 točk) Ali lahko kaj poveste o lastni vrednosti $\lambda_3 \neq -1$ matrike A ? Ali lahko kaj poveste o lastnem vektorju, ki pripada λ_3 ?