1. kolokvij iz Linearne algebre
(Ljubljana, 16. 4. 2015)

1. Dani sta ravnina Σ in premica p.

$$\begin{aligned} \Sigma &: x + y = 5 \\ p &: x - 1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{2} \end{aligned}$$

(a) Izračunaj kot med ravnino Σ in premico p.

(b) Določi presečišče ravnine Σ in premice p.

(c) Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje premico p in je pravokotna na ravnino Σ.

Rešitev

(a) Kot med ravnino in premico α je komplementaren kotu med smernim vektorjem premice in normalnim vektorjem ravnine β:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Kosinus kota lahko izračunamo s skalarnim produktom

$$\cos(\beta) = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{e}\| \|\mathbf{n}\|},$$

kjer je $\mathbf{n} = [1, 1, 0]^\mathsf{T}$ normala ravnine in $\mathbf{e} = [1, 2, 2]^\mathsf{T}$ smerni vektor premice.

$$\cos(\beta) = \sin(\alpha) = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

kar pomeni, da je $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

(b) Presečišče lahko poiščemo na več načinov. Ena možnost je, da rešimo sistem enačb

$$\begin{aligned} x + y &= 5, \\ x - 1 &= \frac{y+2}{2}, \\ x - 1 &= \frac{z+3}{2}. \end{aligned}$$

Če odštejemo prvi dve enačbi, dobimo

$$\begin{aligned} y + 1 &= 5 - \frac{y+2}{2} \\ \frac{3y}{2} &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

in nato izračunamo še $x = 3$ in $z = 1$. Presečišče je $P(3, 2, 1)$.

(c) Normala na iskano ravnino mora biti pravokotna tako na normalo $\mathbf{n}$ ravnine Σ, kot tudi na smerni vektor $\mathbf{e}$. Lahko jo izračunamo npr. z vektorskim produktom

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Enačba iskane ravnine se glasi

$$2x - 2y + z = d,$$

d izračunamo tako, da vstavimo koordinate neke točke na premici npr. presečišča: $d = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 1 = 3$ in enačba ravnine je

$$2x - 2y + z = 3.$$

2. Za katere vrednosti parametra a ima sistem enačb

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ -3x + y - 3z &= 6 \\ -2x + y + (a^2 - a - 2)z &= a + 4 \end{aligned}$$

(a) enolično rešitev?

(b) nobene rešitve?

(c) več rešitev? V tem primeru rešitve eksplicitno zapiši.

Rešitev

(a) Sistem bo imel enolično rešitev, če je rang matrike sistema poln, torej 3. To lahko preverimo, tako da izvedemo Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -3 & 6 \\ -2 & 1 & a^2 - a - 2 & a + 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 0 & 21 \\ 0 & 5 & a^2 - a & a + 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a^2 - a & a - 1 \end{bmatrix}$$

Matrika sistema ima poln rang natanko tedaj, ko je $a^2 - a \neq 0$. Sistem ima natanko eno rešitev za vse a razen $a = 0$ in $a = 1$.

(b) Sistem ne bo rešljiv, če bo $a^2 - a = 0$ in $a - 1 \neq 0$. To je v primeru, če je $a = 0$.

(c) Sistem bo imel neskončno rešitev, če $a^2 - a = a - 1 = 0$, torej, če je $a = 1$. V tem primeru je razširjena matrika sistema po eliminaciji enaka

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

spremenljivka z je prosta, $y = 3$ in $x = -1 - z$.

3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Poišči bazi za $N(A)$ in $C(A)$. Določi $\dim(N(A))$ in $\dim(C(A))$.

(b) Zapiši množico rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ za vektor $\mathbf{b} = [-1, 1, -1, 1]^\mathsf{T}$.

(c) Poišči vektor $\mathbf{x}$, ki reši sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in je pravokoten na $\mathbf{b}$. Koliko je takih vektorjev?

Rešitev

(a) Pomagamo si z Gauss–Jordanovo eliminacijo na matriki A:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bazo stolpčnega prostora $C(A)$ lahko sestavimo iz 1., 2. in 4. stolpca matrike A. Dimenzija $C(A)$ je 3. Dimenzija ničelnega prostora je 1, v baza, pa je katerakoli neničelna rešitev $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Prosta spremenljivka je x_3. Če si izberemo $x_3 = 1$, dobimo $x_4 = 0$, $x_2 = 2$ in $x_1 = -2$. Vektor $[-2, 2, 1, 0]^\mathsf{T}$ sestavlja bazo $N(A)$.

(b) Rešitve sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lahko poiščemo z gaussovo eliminacijo. Lahko jo pa uganemo. Splošna rešitev $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, kjer je $\mathbf{x}_p$ izbrana rešitev sistema, $\mathbf{x}_h \in N(A)$. Izbrano rešitev je lahko uganiti, saj je $\mathbf{b}$ enak zadnjemu stolpcu matrike in je zato $A[0, 0, 0, 1]^\mathsf{T} = \mathbf{b}$. Splošno rešitev le še zapišemo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

za $c \in \mathbb{R}$.

(c) Če dodamo pogoj, da mora biti $\mathbf{x} \perp \mathbf{b}$, se pravi

$$0 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = 2c + 2c - c + 1,$$

hitro dobimo, da je $c = -\frac{1}{3}$ in $\mathbf{x} = \frac{1}{3}[2, -2, -1, 3]^\mathsf{T}$.

4. Naj bosta $\mathbf{u} = [1, 0, 3]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{v} = [3, 0, 1]^\mathsf{T}$ vektorja v $\mathbb{R}^3$.

   (a) Prepričaj se, da je $\mathcal{U} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}\}$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$. *Natančno utemelji!*

   (b) Poišči matriko A, da bo $\mathcal{U}$ stolpčni prostor A, tj. $\mathcal{U} = C(A)$. Kolikšna je dimenzija $\mathcal{U}$?

Rešitev

(a) Nalogo lahko rešimo na več načinov. Ena možnost je, da preverimo, da je množica $\mathcal{U}$ zaprta za linearne kombinacije. Vzemimo dva vektorja $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{U}$ in števili $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pokazati moramo, da je tudi linearna kombinacija

$$\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2$$

element $\mathcal{U}$. Ker sta $\mathbf{x}_1$ in $\mathbf{x}_2$ v $\mathcal{U}$, je $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_1$ in $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_2$, zato je

$$\begin{multline} \mathbf{u} \cdot (\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) = \\ \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}_2 = \alpha \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_2 = \\ \mathbf{v} \cdot (\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \end{multline}$$

se pravi, da je tudi

$$\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 \in \mathcal{U}.$$

$\square$

(b) Matriko A poiščemo tako, da najprej določimo bazo za $\mathcal{U}$. Če enačbo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$ malce obrnemo, dobimo

$$0 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} = [-2, 0, 2] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2(x - z) = 0$$

Množica $\mathcal{U}$ je torej ničelni prostor matrike $[-2, 0, 2]$ oziroma ravnina z enačbo $x - z = 0$. Dimenzija $\mathcal{U}$ je 2, torej za bazo potrebujemo dva neodvisna vektorja, za katera velja $x = z$ oziroma $x_1 = x_3$. Ena možna baza je recimo

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

je pa še neskončno drugih možnih izbir. Matriko A dobimo enostavno tako, da bazne vektorje postavimo kot stolpce matrike. Ena možna rešitev za A je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$