

2. kolokvij iz Linearne algebre (Ljubljana, 29. 5. 2014)

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega ali dveh A4 listov s formulami. Rezultati bodo objavljeni na strani ucilnica.fri.uni-lj.si.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Za matriko A in vektor \mathbf{b} ;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix},$$

poišči pravokotno projekcijo \mathbf{b} na stolpčni prostor matrike A ; $C(A)$.

2. Poišči ortonormirano bazo podprostora v \mathbb{R}^5 , ki ga napenjajo vektorji

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 8 \\ 10 \\ -13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči lastne vrednosti ter pripadajoče lastne vektorje matrike A . Ali lahko matriko A diagonaliziramo? Zakaj oziroma zakaj ne?

(b) Ali obstaja *neničeln* vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, da je $A\mathbf{x}$ vsaj dvakrat daljši vektor, tj. $\|A\mathbf{x}\| \geq 2\|\mathbf{x}\|$? Če tak \mathbf{x} obstaja, ga poišči!

4. Zaporedji a_n in b_n sta podani rekurzivno z enačbama

$$\begin{aligned} a_n &= 5a_{n-1} - 3b_{n-1} \\ b_n &= 6a_{n-1} - 4b_{n-1} \end{aligned}$$

in začetnima členoma $a_0 = 0$ in $b_0 = 1$.

(a) Izračunaj člena a_3 in b_3 .

(b) Poišči eksplicitno formulo za zaporedje b_n .

Vse odgovore dobro utemelji!