2. kolokvij iz Linearne algebre
(Ljubljana, 6. junij 2018)

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega A4 lista s formulami. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Naj bo $\mathbf{a} = [1, -1, 1]^\mathsf{T}$. Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom
$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{a}.$$
   (a) Preveri, da je ϕ linearna.
   (b) Poišči matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}^3$.
   (c) Poišči bazi za $\ker(\phi)$ in $\operatorname{im}(\phi)$.

Rešitev :

(a) Za poljubni števili $x, y \in \mathbb{R}$ in vektorja $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ imamo po definiciji preslikave ϕ
$$\begin{aligned}\phi(x\mathbf{u} + y\mathbf{v}) &= \mathbf{a}(x\mathbf{u} + y\mathbf{v})^\mathsf{T}\mathbf{a}\\ &= x\mathbf{a}\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{a} + y\mathbf{a}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{a}\\ &= x\phi(\mathbf{u}) + y\phi(\mathbf{v})\end{aligned}$$
kjer je treba samo uporabiti osnovne lastnosti matričnega množenja.

(b) Da dobimo matriko A, ki izraža preslikavo ϕ v standardni bazi je treba izračunati slike standardnih baznih vektorjev $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ in $\mathbf{e}_3$ in rezultate zložiti v stolpce matrike.
$$A = \begin{bmatrix}\phi(\mathbf{e}_1) & \phi(\mathbf{e}_2) & \phi(\mathbf{e}_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

(c) Izvedemo Gaussovo eliminacijo na A:
$$A \sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
Ker ima matrika pivot samo v prvem stolpcu, je $dim(\operatorname{im}(\phi)) = 1$ in za bazo lahko vzamemo 1. stolpec matrika A (torej kar $\mathbf{a}$). Ker imamo dve prosti spremenljivki, je $dim(\ker(\phi)) = 2$ in lahko za bazo vzamemo katerikoli dve linearno neodvisni rešitvi enačbe
$$x - y + z = 0,$$
recimo $\{[1, 1, 0]^\mathsf{T}, [-1, 0, 1]^\mathsf{T}\}$.

2. Podatke (x_i, y_i) iz tabele

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline y_i & -4 & -1 & 5 & 2 \end{array}.$$

želimo aproksimirati s funkcijo oblike $f(x) = ax + \frac{b}{x}$.

(a) Iz $f(x_i) = y_i$ dobimo predoločen sistem linearnih enačb za a in b. Zapiši matriko in desno stran tega sistema.

(b) Določi parametra a in b po linearni metodi najmanjših kvadratov, da bo f predstavljala najboljšo aproksimacijo za zgornje podatke.

Rešitev :

(a)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(b) Rešiti je treba normalni sistem

$$A^\mathsf{T} A\mathbf{x} = A^\mathsf{T}\mathbf{d}$$

Dobimo

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{5}{2} & 4 & 9 \\ 4 & 10 & 18 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Torej $a = 2$ in $b = 1$.

3. Dan je vektorski podprostor V v $\mathbb{R}^4$

$$V = \mathcal{L}\{[2,2,1,0]^\mathsf{T}, [2,1,3,-2]^\mathsf{T}, [1,1,5,0]^\mathsf{T}\}$$

(a) Poišči ortonormirano bazo za V.

(b) Poišči ortonormirano bazo za $V^\perp$.

(c) Izračunaj pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{a} = [9,0,0,0]^\mathsf{T}$ na V.

Rešitev :

(a) Izvedemo Gramm-Schmidtov postopek

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 = [2,2,1,0]^\mathsf{T} \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = [0,-1,2,-2]^\mathsf{T} \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = [-1,0,2,2]^\mathsf{T} \end{aligned}$$

Dolžine vektorjev so vse enake 3. Za ortonormirano bazo lahko torej vzamemo $\mathbf{q}_i = \mathbf{u}_i/3$.

(b) Velja $V^\perp = C(A)^\perp = N(A^\top)$, kjer je $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ (lahko pa vzamemo tudi vektorje u_i). Poiskati je treba torej bazni vektor $N(A^\top)$ (vnaprej vemo, da bo dobili samo en vektor, saj če je $dim(V) = 3$, mora biti $dim(V^\perp) = 1$). To lahko naredimo z Gaussovo eliminacijo

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Za bazni vektor lahko vzamemo $\mathbf{v}_4 = [2, -2, 0, 1]^\top$ in ko ga normiramo, imamo $\mathbf{q}_4 = \mathbf{v}_4/3$.

(c) Najhitrejši način je, da od $\mathbf{a}$ odštejemo projekcijo na $V^\perp$

$$\text{proj}_V \mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{q}_4 \mathbf{q}_4^\top \mathbf{a} = [5, 4, 0, -2]^\top$$

4. Diagonaliziraj matriko

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Torej poišči prehodno matriko P in diagonalno matriko D, da bo veljalo $A = PDP^{-1}$. Nato izračunaj A^{2018}. Ali lahko (v tem primeru) to storiš, ne da bi izračunal P^{-1}?

Rešitev : Za karakteristični polinom dobimo (po nekaj korakih Gaussove eliminacije)

$$\det(A - \lambda I) = \lambda(1 - \lambda)(1 + \lambda)$$

Lastne vrednosti so torej $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = -1$, torej

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Po izračunu lastnih podprostorov (torej ničelnih prostorov $N(A - \lambda_1 I)$, $N(A - \lambda_2 I)$ in $N(A - \lambda_3 I)$) dobimo lastne vektorje $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ in $\mathbf{v}_3$ ter

$$P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Velja

$$A^{2018} = PD^{2018}P^{-1}$$

Toda ker so lastne vrednosti slučajno -1 in 1 in 0 velja tudi

$$D^{2018} = D^2$$

saj so vse sode potence lastnih vrednosti enake. Potem lahko dobimo

$$A^{2018} = PD^{2018}P^{-1} = PD^2P^{-1} = A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

kar pomeni, da se lahko pri izračunu izognemo eksplicitnemu izračunu P^{-1} (ni pa seveda nič narobe, če ga izračunamo).