

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Linearna algebra: 2. kolokvij

24. maj 2023

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na ucilnica.fri.uni-lj.si. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Matrika A_n dimenzije $n \times n$ ima elemente $a_{ij} = |i - j|$. Na primer,

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) (10) Izračunaj $\det(A_4)$.

b) (15) Izračunaj $\det(A_n)$.

2. naloga (25 točk)

Dana sta matrika A in vektor \vec{v} :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a) (10) Poišči ortonormirano bazo za $C(A)$.

b) (8) Poišči ortonormirano bazo za $C(A)^\perp$.

c) (7) Določi pravokotno projekcijo vektorja \vec{v} na $C(A)$.

3. naloga (25 točk)

Pri nekih meritvah smo dobili naslednje vrednosti:

x_i	0	1	3
y_i	0	8	10

Iščemo funkcijo oblike

$$f(x) = a \cdot 2^x + b \cdot (-1)^x,$$

ki se tem podatkom kar najbolje prilega.

a) (10) Zapiši pripadajoči sistem enačb za neznana parametra a in b v obliki $A\vec{x} = \vec{f}$. Ali je sistem rešljiv?

b) (15) Zapiši pripadajoči normalni sistem in izračunaj a in b po metodi najmanjših kvadratov.

4. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) (5) Določi vse lastne vrednosti matrike A .

b) (15) Ali je A možno diagonalizirati? Če da, poišči diagonalno matriko D in obrnljivo matriko P , da bo $D = P^{-1}AP$.

c) (5) Naj bo \vec{v} lastni vektor za najmanjšo lastno vrednost matrike A . Izračunaj

$$(A^{2023} - A^{2022} - A^{2021})\vec{v}.$$