2. popravni kolokvij iz Linearne algebre
(Ljubljana, 28. 6. 2012)

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh A4 listov s formulami.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Premica p je dana z enačbo

$$\frac{x-1}{2} = y - 2 = 1 - z,$$

Točke $A(1,0,1)$, $B(3,5,5)$ in $C(5,2,1)$ pa določajo ravnino Σ. Poišči enačbo premice q, ki leži v ravnini Σ in seka premico p pod pravim kotom.

2. V $\mathbb{R}^3$ so dani vektorji

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ter} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Ali so vektorji $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ linearno neodvisni? Je $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ baza za $\mathbb{R}^3$? Če se da, zapiši vektor $\mathbf{b} = [1,1,1]^\mathsf{T}$ kot linearno kombinacijo zgornjih vektorjev.

   (b) Naj bo T pokončna 4×3 matrika, za katero je

$$T\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad T\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Določi $T\mathbf{b}$. Kaj znaš povedati o ničelnem prostoru matrike T; $N(T)$?

3. Naj bo $K \subset \mathbb{R}^4$ množica vseh vektorjev $[x_1, x_2, x_3, x_4]^\mathsf{T}$, za katere velja

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Pokaži, da je K vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$ in določi njegovo dimenzijo.

   (b) Poišči ortonormirano bazo prostora K.

   (c) Dopolni bazo za K do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}^4$.

4. Dana je permutacijska matrika

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči lastne vrednosti matrike P. Ali obstaja ortonormirana baza $\mathbb{R}^5$ iz lastnih vektorjev matrike P? Poišči jo, če obstaja.

   (b) Kateri permutaciji na 5 elementih ustreza matrika P?

Vse odgovore dobro utemelji!

2. kolokvij iz Linearne algebre
(Ljubljana, 1. 6. 2012)

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega ali dveh A4 listov s formulami. Rezultati bodo objavljeni na strani `ucilnica.fri.uni-lj.si`*.*

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Podatke v tabeli

x_i	1	$1/2$	$1/3$	$1/4$
y_i	-1	2	4	5

bi radi aproksimirali s funkcijo oblike

$$f(x) = a + \frac{b}{x}.$$

Določi konstanti a in b, da bo $f(x_i)$ najboljša aproksimacija za y_i po metodi najmanjših kvadratov.

2. Vektorji

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ter} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

so linearno neodvisni. (Tega ni treba preverjati.) Poišči ortonormirano bazo vektorskega podprostora v $\mathbb{R}^4$, ki ga ti vektorji razpenjajo. Poišči še matriko ortogonalne projekcije na ta podprostor.

3. Naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči determinanto matrike X, ki je rešitev enačbe

$$AX = B.$$

4. Podana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diagonaliziraj matriko A in izračunaj A^{2012}.

Vse odgovore dobro utemelji!