2. popravni kolokvij iz Linearne algebre
(Ljubljana, 30. 6. 2016)

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh A4 listov s formulami. Rezultati bodo objavljeni na strani `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Dani sta premica p in ravnina Σ.

$$\begin{aligned} p &: \frac{x-4}{3} = 1-y = \frac{z-5}{2} \\ \Sigma &: x-y+z=2 \end{aligned}$$

   (a) Poišči presečišče premice p in ravnine Σ.

   (b) Pod kakšnim kotom se sekata p in Σ? Dovolj je izračunati kosinus kota.

   (c) Prezrcali premico p preko ravnine Σ.

Rešitev: Presečišče poiščemo enostavno tako, da rešimo sistem enačb za premico in ravnino skupaj:

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{3} &= 1-y \\ 1-y &= \frac{z-5}{2} \\ x-y+z &= 2 \end{aligned}$$

Razširjena matrika sistema je

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Koordinate presečišča so rešitve sistema $z = 3$, $y = (7 - z)/2 = 2$ in $x = 7 - 3y = 1$. Presečišče $P(1, 2, 3)$.

Kosinus kota med premico in ravnino lahko določimo s skalarnim produktom med smernim vektorjem premice $\vec{e} = [3, -1, 2]^T$ in normalo ravnine $\vec{n} = [1, -1, 1]^T$:

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \;=\; \sin\alpha = \frac{\vec{e} \cdot \vec{n}}{\|\vec{e}\|\|\vec{n}\|} = \frac{6}{\sqrt{14}\sqrt{3}}.$$

Se pravi, da je $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{36}{42}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Zrcalno sliko premice poiščemo tako, da prezrcalimo smerni vektor premice $\vec{e}$ preko ravnine. Formula za zrcaljenje preko ravnine lahko izpeljemo s projekcijo na normalo:

$$\begin{aligned} \vec{e}_z &= \vec{e} - 2\mathrm{pr}_{\vec{n}}\vec{e} = \vec{e} - 2\frac{\vec{e} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\vec{n} \\ &= [3, -1, 2]^T - 2\frac{6}{3}[1, -1, 1]^T = [-1, 3, -2]^T \end{aligned}$$

Zrcalna slika premice p je premica, s smernim vektorjem e_z, ki gre skozi presečišče P. Zapišemo lahko kanonično enačbo:

$$p_z \;:\; \frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 3}{-2}.$$

2. Matrika X preslika vektor $\vec{a}_1 = [1, 1, 2]^T$ v vektor $\vec{b}_1 = [1, -1]^T$, vektor $\vec{a}_2 = [2, 1, 3]^T$ v vektor $\vec{b}_2 = [2, -1]^T$ in vektor $\vec{a}_3 = [2, -2, 1]^T$ v vektor $\vec{b}_3 = [1, 0]^T$. Poišči matriko X. Ali je matrika X enolično določena? Utemelji zakaj! *Namig: Zapiši matrično enačbo, ki ji zadošča matrika X.*

   Rešitev: Matrično enačbo dobimo, če upoštevamo, da je $X\vec{a}_i = \vec{b}_i$. Naj bo A matrika, katere stolpci so vektorji

$\vec{a}_i$ in z B matriko, katere stolpci so vektorji $\vec{b}_i$. Ker velja $X\vec{a}_i = \vec{b}_i$, mora biti produkt XA enak matriki B. Rešiti moramo matrično enačbo

$$XA = B$$

za matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Enačbo $XA = B$ transponiramo in dobimo enačbo $A^T X^T = B^T$, ki jo rešimo z gauss-jordanovo eliminacijo razširjene matrika sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Rešitev je

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Enačba $XA = B$ ima enolično rešitev $X = BA^{-1}$, saj je matrika A obrnljiva.

3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči ortonormirani bazi prostorov $C(A)$ in $N(A)$.

   (b) Poišči pravokotni projekciji vektorja $[3,3,3]$ na $C(A)$ in $N(A)$.

Rešitev: Najprej določimo dimenzijo $C(A)$, tako da naredimo eliminacijo

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dimenzija $C(A)$ je torej 2. Za bazo potrebujemo dva linearno neodvisna vektorja, ki ju lahko nato z gram-schmidtovim postopkom ortogonaliziramo. Opazimo, da sta 1. in 3. stolpec že ortogonalna, zato lahko gram-schmidta izpustimo in vektorja le normiramo. Baza $C(A)$ je

$$\{\vec{q}_1 = \frac{1}{3}[1,2,2]^T, \vec{q}_2 = \frac{1}{3}[2,1,-2]^T\}.$$

Ničelni prostor je prostor rešitev sistema $Ax = 0$ in je dimenzije 1. Za bazo potrebujemo eno neničelno rešitev sistem $Ax = 0$, ki jo z obratnim vstavljanjem dobimo iz reducirane matrike. Npr. $x_3 = 1$, $x_2 = -3x_3 = -3$ in $x_1 = -2x_3 - x_2 = 1$. Ortonormirana baza je tako množica z enim vektorjem

$$\{\vec{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{11}}[1,-3,1]^T\}.$$

Ker imamo ortonormirane baze, lahko projekcijo vektorja $\vec{v} = [3,3,3]^T$ enostavno izračunamo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev q_i, kjer so koeficienti enaki skalarnemu produktu $\langle q_i, v\rangle$

$$\mathrm{pr}_{C(A)}\vec{v} = \langle \vec{q}_1, \vec{v}\rangle \vec{q}_1 + \langle \vec{q}_2, \vec{v}\rangle = \frac{5}{3}[1,2,2]^T + \frac{1}{3}[2,1,-2]^T = \frac{1}{3}[7,11,8]^T.$$

in

$$\mathrm{pr}_{N(A)}\vec{v} = \langle \vec{q}_3, \vec{v}\rangle \vec{q}_3 = -\frac{3}{11}[1,-3,1]^T.$$

4. Poišči splošno rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 4y \\ \dot{y} &= 2x - 3y \end{aligned}$$

ter tisto rešitev, ki zadošča zectnemu pogoju $x(0) = 3$ in $y(0) = 2$.

Rešitev: Sistem diferencialni enačb lahko zapišemo kot eno vektorsko enačbo

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Označimo z A matriko

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev sistema je enaka

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \exp\left(t \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}.$$

Za izračun $\exp(tA)$, najprej matriko A diagonaliziramo. Poiščemo lastne vrednosti, kot rešitve karakteristične enačbe

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(-3 - \lambda) + 8 = \lambda^2 - 1.$$

Dobimo dve lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -1$. Ostrezne lastne vektorje poiščemo kot nenničelne rešitve sistema $(A - \lambda_i)\vec{x} = \vec{0}$. Za $\lambda_1 = 1$ dobimo

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lastni vektor je $\vec{v}_1 = [2, 1]^T$. Podobno dobimo, da je $\vec{v}_2 = [1, 1]^T$ lastni vektor za $\lambda_2 = -1$. Matriko A lahko zapišemo kot

$$A = S \Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

in

$$\exp(tA) = S\exp(t\Lambda)S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

in splošno rešitev kot

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(C-D)e^t + (2D-C)e^{-t} \\ (C-D)e^t + (2D-C)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Rešitev, ki zadošča pogojema $x(0) = 3$ in $y(0) = 2$ dobimo, če izberemo konstanti $C = 3$ in $D = 2$

$$x = 2e^t + e^{-t} \text{ in } y = e^t + e^{-t}.$$

$\boxed{\textbf{Vse odgovore dobro utemelji!}}$