Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

Linearna algebra: računski predrok

31. maj 2021

Čas pisanja: 70 minut. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (15 točk)

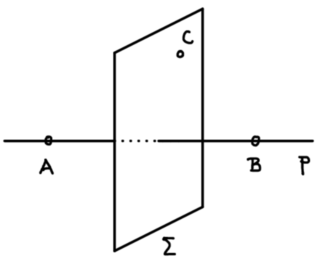
Dane so točke $A(2,1,0)$, $B(1,1,1)$ in $C(1,0,7)$.

a) (5) Poišči enačbo premice p skozi A in B.

$$\vec{p} = \vec{AB} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 2 \qquad\qquad p: \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 2$$

1

b) (5) Poišči enačbo ravnine Σ skozi C, ki je pravokotna na premico p.

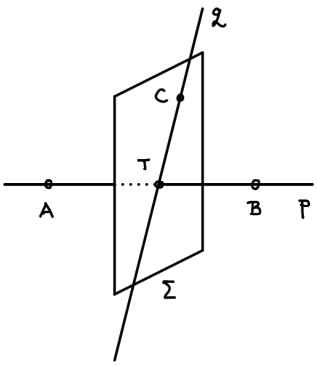


$$\vec{n} = \vec{p} \quad 2 \qquad\qquad \vec{n}\cdot\vec{r}_C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = -1+7 = 6 \quad 2$$

$$-x+z = 6$$

$$\Sigma: \; x - z = -6 \quad 1$$

c) (5) Poišči enačbo premice q, ki vsebuje C in seka p pod pravim kotom.



$$T \in p \Rightarrow \vec{r}_T = \begin{bmatrix} 2-t \\ 1 \\ t \end{bmatrix} \quad \text{za nek } t \in \mathbb{R}$$

$$T \in \Sigma \Rightarrow 2 - t - t = -6$$

$$2 - 2t = -6$$

$$1 - t = -3$$

$$t = 4$$

$$T(-2,1,4) \quad 2$$

$$\vec{q} = \vec{CT} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad 2 \qquad\qquad q: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad 1$$

2. naloga (20 točk)

Dana sta matrika A ter vektor $\vec{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) (10) Poišči ortonormirano bazo stolpčnega prostora matrike A, $C(A)$.

$$\vec{u}_1 = \vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 2 \qquad \|\vec{u}_1\| = 2$$

$$\vec{u}_2 = \vec{c}_2 - \frac{\vec{c}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad 3 \qquad \|\vec{u}_2\| = \sqrt{2}$$

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad 5 \qquad \{\vec{q}_1, \vec{q}_2\} \text{ je ONB za } C(A)$$

b) (5) Poišči vektor $\vec{x}$, za katerega je $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$ najmanjše možno.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad 1 \qquad A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} \quad 1$$

$$[A^TA \mid A^T\vec{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 3$$

c) (5) Poišči pravokotno projekcijo $\vec{b}$ na $C(A)$.

$$\vec{x} = \mathrm{proj}_{C(A)}(\vec{b}) = \overset{2}{(\vec{q}_1 \cdot \vec{b})}\vec{q}_1 + (\vec{q}_2 \cdot \vec{b})\vec{q}_2 = 4 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 3$$

$$\vec{q}_1 \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \qquad \vec{q}_2 \cdot \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \sqrt{2}$$

2. način:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 5$$

3. naloga (15 točk)

Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definirajmo še matriko $B = A + M$.

a) ~~(3)~~ 4 Matriki A in B imata enake lastne vrednosti (tega ni treba dokazovati). Poišči jih.

A zgornjetrikotna $\underset{1}{\Rightarrow}$ l. vrednosti so diagonalni elementi $\Rightarrow$ $\underset{2}{\lambda_{1,2} = 7}$, $\underset{1}{\lambda_3 = 4}$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

b) ~~(6)~~ 7 Poišči vse lastne vektorje matrike B. Je B diagonalizabilna?

$$B - 7I = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to x_1 = x_3 \\ \to x_2 = x_3 \end{matrix} \Bigg\} \; \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 2$$

samo en l. vektor za dvojno l. vrednost $\Rightarrow$ ni diagonalizabilna 3

$$B - 4I = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to x_2 = 0 \\ \to x_3 = 0 \end{matrix} \Bigg\} \; \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2$$

c) ~~(3)~~ 4 Naj bo $\vec{v} = [1, 1, 1]^{\mathsf{T}}$. Izračunaj $B^{2021}\vec{v}$.

l. vektor za $\lambda_{1,2} = 7$ $\longrightarrow$ $\underset{1}{B\vec{v} = 7\vec{v}}$ $\longrightarrow$ $B^{2021}\vec{v} = 7^{2021}\vec{v} = \begin{bmatrix} 7^{2021} \\ 7^{2021} \\ 7^{2021} \end{bmatrix}$ 3