Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

Linearna algebra: računski izpit

17. junij 2021

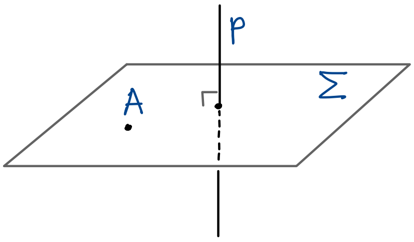
Čas pisanja: 70 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (15 točk)

Naj bo p premica s parametrizacijo

$$p : \vec{r}(t) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}.$$

a) **(5)** Poišči enačbo ravnine Σ, ki je pravokotna na premico p in gre skozi točko $A(1,1,1)$.

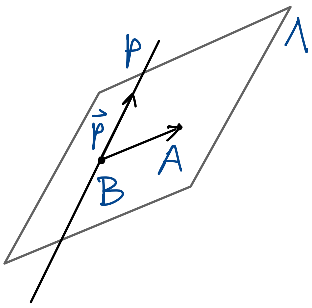


Vzamemo $\vec{n}_\Sigma = \vec{p} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$, torej:

$$\Sigma : x + 2y + z = 4.$$

vstavimo $A(1,1,1)$

b) **(5)** Poišči enačbo ravnine Λ, ki vsebuje premico p in gre skozi točko $A(1,1,1)$.



Za $\vec{n}_\Lambda$ vzamemo $\vec{p} \times \vec{BA} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, torej:

$$\left.\begin{array}{l} B(1,0,1) \\ A(1,1,1) \end{array}\right\} \vec{BA} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$\Lambda : -x + z = 0$ oz. $\Lambda : x - z = 0$

spet vstavimo A (ali B)

c) **(5)** Zapiši parametrizacijo premice q, ki je presek ravnin Σ in Λ.

Smerni vektor $\vec{q}$ je pravokoten na $\vec{n}_\Sigma$ in $\vec{n}_\Lambda$. Vzamemo lahko torej:

$$\vec{q} \parallel \vec{n}_\Sigma \times \vec{n}_\Lambda = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix} \dots \vec{q} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} \text{ in}$$

$$q : \vec{r}(t) = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

to je $\vec{r}_A$

2. naloga (20 točk)

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. = [\vec a_1, \vec a_2, \vec a_3]$$

a) (10) Poišči ortonormirano bazo stolpčnega prostora matrike A.

$$\vec u_1 = \vec a_1$$

$$\vec u_2 = \vec a_2 - \frac{\vec u_1 \cdot \vec a_2}{\vec u_1 \cdot \vec u_1} \vec u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{4}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec u_3 = \vec a_3 - \frac{\vec u_1 \cdot \vec a_3}{\vec u_1 \cdot \vec u_1} \vec u_1 - \frac{\vec u_2 \cdot \vec a_3}{\vec u_2 \cdot \vec u_2} \vec u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec q_1 = \frac{1}{\|\vec u_1\|} \vec u_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec q_2 = \frac{1}{\|\vec u_2\|} \vec u_2 = \frac{1}{\sqrt 2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec q_3 = \frac{1}{\|\vec u_3\|} \vec u_3 = \frac{1}{\sqrt 2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\{\vec q_1, \vec q_2, \vec q_3\}$ je ortonormirana baza za $C(A)$.

b) (5) Poišči QR razcep matrike A.

$$Q = [\vec q_1, \vec q_2, \vec q_3] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sqrt 2 \\ 1 & 0 & \sqrt 2 \\ 1 & \sqrt 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

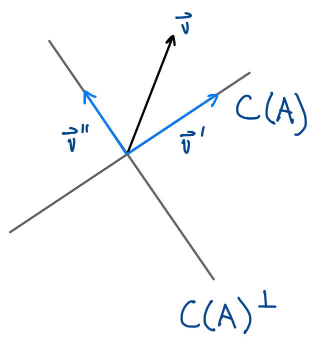
Koeficiente R preberemo iz Gram-Schmidt-ovega postopka zgoraj:

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt 2 & 3/\sqrt 2 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt 2 \end{bmatrix}.$$

c) (5) Poišči pravokotni projekciji vektorja $\vec v = [1,2,3,4]^{\mathsf T}$ na $C(A)$ ter $C(A)^{\perp}$.

Poiščimo $\vec q_4 \in C(A)^\perp$, saj $\dim (C(A)^\perp) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim C(A) = 4 - 3 = 1$.

Uganemo $\vec u_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \in C(A)^\perp$ in ga normiramo... $\vec q_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.



$$\vec v'' = \mathrm{proj}_{C(A)^\perp} \vec v = (\vec q_4 \cdot \vec v)\, \vec q_4 = -2 \vec q_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\vec v' = \mathrm{proj}_{C(A)} \vec v = \vec v - \vec v'' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. naloga (15 točk)

Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (5) Poišči bazo ničelnega prostora matrike A.

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \therefore\ x_1 + x_4 = 0 \\ \therefore\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} -x_4 \\ -x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{N(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) (5) Izračunaj A^2. Kaj ti A^2 pove o lastnih vektorjih in pripadajočih lastnih vrednostih matrike A?

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

stolpci mat. A

Če pišemo $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4]$, to pomeni $A\vec{a}_1 = 2\vec{a}_1$ in $A\vec{a}_2 = 2\vec{a}_2$ ..., tj. $\vec{a}_1$ in $\vec{a}_2$ sta lastna vektorja A za lastno vrednost 2.

c) (5) Poišči ortonormirano bazo $\mathbb{R}^4$ sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A in zapiši diagonalizacijo matrike A (tj. matriki D in Q, za kateri je $A = QDQ^\top$).

Vektorji iz $B_{N(A)}$ (za lastno vrednost 0) ter $\vec{a}_1$ in $\vec{a}_2$ (za lastno vrednost 2) so 4 linearno neodvisni last. vekt. A, ki so celo ortogonalni. Ortonormirana baza iz last. vekt. A za $\mathbb{R}^4$ je torej:

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

In zato: $$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$