

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
$\Sigma$	

## Linearna algebra: računski izpit

13. junij 2022

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na [ucilnica.fri.uni-lj.si](http://ucilnica.fri.uni-lj.si). **Vse odgovore dobro utemelji!**

### 1. naloga (25 točk)

Premici  $p$  in  $q$  sta dani z enačbama

$$p: x - \frac{1}{2} = \frac{y}{2} = 1 - z \quad \text{ter} \quad q: \frac{x+2}{3} = y+1 = \frac{z-1}{2}.$$

a) (5 točk) Ali se premici  $p$  in  $q$  sekata?

b) (5 točk) Poišči enačbo ravnine  $\Sigma$ , ki vsebuje premico  $p$  in je vzporedna premici  $q$ .

c) (5 točk) Poišči enačbo ravnine  $\Gamma$ , ki vsebuje premico  $q$  in je pravokotna na ravnino  $\Sigma$ .

d) (10 točk) V kateri točki ravnina  $\Gamma$  seka premico  $p$ ? Določi razdaljo med premicama  $p$  in  $q$ .

## 2. naloga (25 točk)

Naj bo  $A \in \mathbb{R}^4$  matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V  $\mathbb{R}^4$  sta dani podmnožici

$$U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = 0\} \text{ ter } V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : A \mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

**a) (10 točk)** Naj bosta  $\mathbf{u} = [0, 0, 1, 1]^\top$  ter  $\mathbf{v} = [1, -1, 0, 0]^\top$ . Prepričaj se, da je  $\mathbf{u} \in U$  ter  $\mathbf{v} \in V$ . Ali je vektor  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  vsebovan v  $U$  oziroma  $V$ ?

**b) (15 točk)** Ali sta  $U$  in  $V$  vektorska podprostor v  $\mathbb{R}^4$ ? Za vsakega, ki je vektorski podprostor, poišči bazo in določi njegovo dimenzijo.

### 3. naloga (25 točk)

Podatke  $(x, y)$  iz tabele

$x$	-2	-1	1	2
$y$	-4	1	2	-1

želimo aproksimirati s funkcijo oblike  $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$ .

**a) (5 točk)** Zapiši predoločen sistem enačb za parametra  $a$  in  $b$ .

**b) (20 točk)** Določi parametra  $a$  in  $b$  po linearni metodi najmanjših kvadratov, da bo  $f$  predstavljala najboljšo aproksimacijo za zgornje podatke.

**4. naloga (25 točk)**

Naj bo  $K$  matrika

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**a) (7 točk)** Izračunaj karakteristični polinom matrike  $K$  in poišči vse njene lastne vrednosti.

**b) (3 točke)** Prepričaj se, da je  $\mathbf{v} = [1, 1, 1]^T$  lastni vektor matrike  $K$ . Kateri lastni vrednosti pripada?

**c) (5 točk)** Ali je  $\{\mathbf{v}\}^\perp$  lastni podprostor matrike  $K$ ? Zakaj? Če je, za katero lastno vrednost?

**d) (10 točk)** Poišči ortonormirano bazo za  $\mathbb{R}^3$  sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike  $K$ .