

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Linearna algebra: računski izpit

28. junij 2023

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Premici p in q sta dani z enačbama

$$p: x - 1 = y + 1 = 5 - z \quad \text{ter} \quad q: x = z, y = 0.$$

a) (5 točk) Poišči enačbo ravnine Σ , ki vsebuje premico p in je pravokotna na premico q .

b) (5 točk) Poišči točko T_1 , ki je presek ravnine Σ in premice q .

c) (5 točk) Poišči enačbo ravnine Γ , ki vsebuje premico q in je pravokotna na premico p .

d) (5 točk) Poišči točko T_2 , ki je presek ravnine Γ in premice p .

e) (5 točk) Določi razdaljo med premicama p in q .

2. naloga (25 točk)

Naj bo $A \in \mathbb{R}^2$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

V \mathbb{R}^2 sta dani podmnožici

$$U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \text{ ter } V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0\}.$$

a) (8 točk) Ali je U vektorski prostor? Če je, poišči bazo in določi njegovo dimenzijo. Če ni, zakaj ne?

b) (8 točk) Ali je V vektorski prostor? Če je, poišči bazo in določi njegovo dimenzijo. Če ni, zakaj ne?

c) (9 točk) Za vsakega izmed U in V , ki je vektorski podprostor, poišči njegov ortogonalni komplement.

3. naloga (25 točk)

Podatke (x, y) iz tabele

x	0	1	2	3
y	3	0	23	30

želimo aproksimirati s funkcijo oblike $f(x) = ax^2 + b(-1)^x$.

a) (10 točk) Zapiši predoločen sistem enačb za parametra a in b . Ali je sistem rešljiv?

b) (15 točk) Določi parametra a in b po linearni metodi najmanjših kvadratov, da bo f predstavljala najboljšo aproksimacijo za zgornje podatke.

4. naloga (25 točk)

Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) (2 točki) Prepričaj se, da je $\mathbf{u} = [7, 4, 7, 4]^T$ lastni vektor matrike A . Kateri lastni vrednosti pripada?

b) (10 točk) Izračunaj karakteristični polinom matrike A in poišči vse njene lastne vrednosti.

c) (8 točk) Poišči lastni vektor \mathbf{v} , ki pripada najmanjši lastni vrednosti matrike A in ima zadnjo komponento enako 1.

d) (5 točk) Koliko je rang matrike A ? Ali lahko od tod sklepaš, če je A diagonalizabilna? (Ni potrebno iskati P , D in P^{-1} , zanje ne dobite točk.)