Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Linearna algebra: računski izpit

26. junij 2024

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Premica p je dana z enačbo

$$p: \ x = t-1,\ y = t+1,\ z = 5-t.$$

a) (5 točk) Poišči točki A in B na premici p, ki ustrezata vrednostim parametra $t=0$ in $t=1$.
Vstavimo vrednosti $t=0$ in $t=1$ v parametrično enačbo in dobimo:

$$A: \ x = 0-1 = -1,\ y = 0+1 = 1,\ z = 5-0 = 5;\ A(-1,1,5)$$

$$B: \ x = 1-1 = 0,\ y = 1+1 = 2,\ z = 5-1 = 4;\ B(0,2,4)$$

b) (5 točk) Poišči enačbo ravnine Σ, ki vsebuje premico p in točko $C(2,2,3)$.
Najlažje je poiskati parametrično enačbo ravnine. Potrebujemo točko na ravnini in 2 linearno neodvisna vektorja, ki sta vzporedna z ravnino. Za točko izberemo $A(-1,1,5)$ za vektorja pa $\vec{AB} = [1,1,-1]^T$ in $\vec{AC} = [3,1,-2]^T$.

$$\Sigma: x = -1+t+3s,\ y = 1+t+s,\ z = 5-t-2s.$$

Če želimo implicitno enačbo ravnine $ax+by+cz=d$, moramo izračunati normalo na ravnino:

$$\mathbf{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = [1,1,-1]^T \times [3,1,-2]^T = [1,1,2]^T$$

in nato še prosti člen $d = x+y+2z = 10$, tako da namesto x,y,z vstavimo koordinate točke A, B ali C. Implicitna enačba ravnine je

$$\Sigma: x+y+2z = 10.$$

c) (5 točk) Poišči enačbo ravnine Γ, ki je pravokotna na premico p in vsebuje točko C.
Če je ravnina pravokotna na premico p, je njena normala $\mathbf{n}$ enaka smernemu vektorju premice p.

$$n = [1,1,-1]^T.$$

Nato poiščemo še prosti člen $d = x+y-z = 2+2-3 = 1$ in dobimo enačbo ravnine:

$$\Gamma: x+y-z = 1.$$

d) (5 točk) Poišči presečišče premice p in ravnine Γ.
Presečišče poiščemo tako, da koordinate točke na premici vstavimo v enačbo ravnine:

$$\begin{aligned} (t-1)+(t+1)-(5-t) &= 1 \\ 3t-5 &= 1 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

in t vstavimo nazaj v parametrični zapis koordinat x,y in z:

$$x = 2-1 = 1,\ y = 2+1 = 3,\ z = 5-2 = 3,\ P(1,3,3).$$

e) (5 točk) Določi razdaljo med premico p in točko C. Razdalja med p in C je enaka razdalji med C in P (presečišče Γ in p).

$$d(p,C) = d(P,C) = \sqrt{(1-2)^2+(3-2)^2+(3-3)^2} = \sqrt{2}.$$

2. naloga (25 točk)

V $\mathbb{R}^3$ sta dani podmnožici

$$\begin{aligned} U &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = [2t+3s, -t+s, -s]^T,\ t,s \in \mathbb{R}\} \\ V &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = [t+1, 2t-s, 1]^T,\ t,s \in \mathbb{R}\}\ . \end{aligned}$$

a) (8 točk) Ali je U vektorski prostor? Če je, poišči bazo in določi njegovo dimenzijo. Če ni, zakaj ne? Prostor U je podan parametrično in ga lahko izrazimo kot stolpčni prostor matrike:

$$\begin{bmatrix} 2t+3s \\ -t+s \\ -s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}.$$

Ker je $U = C(A)$ za $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, je vektorski podprostor. Baza prostora so stolpci matrike A:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) (8 točk) Ali je V vektorski prostor? Če je, poišči bazo in določi njegovo dimenzijo. Če ni, zakaj ne?

Vektorji iz V imajo 3 komponento vedno 1, zato V ne vsebuje ničelnega vektorja. Zato V ni vektorski podprostor.

c) (9 točk) Če je U podprostor, poišči matriki A in B, da je $C(A) = U$ in $N(B) = U$. Enako za V.

Za matriko A, za katero je $U = C(A)$ lahko vzamemo matriko, katere stolpci so bazni vektorji U:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Če je B matrika, za katero je $N(B) = U$, potem je $B \cdot A = 0$. Poleg tega mora biti $\dim(N(B)) = 2$. Če enačbo $BA = 0$ transponiramo, dobimo enačbo $A^T B^T = 0$, ki ji mora zadoščati matrika B. Enačbo $A^T B^T = 0$ rešimo z Gaussovo eliminacijo matrike A^T:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in dobimo rešitev $x_3 = -5x_1, x_2 = -2x_1$ in

$$B = [1, -2, -5].$$

Ker je rang B enak 1, je $\dim(N(B)) = 2$ in $N(B) = U$.

3. naloga (25 točk)

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

a) (10 točk) Poišči ortonormirano bazo prostora $C(A)$.

Uporabimo Gram-Schmidtov postopek in najprej izračunamo ortogonalno bazo.

$$\begin{aligned} o_1 &= a_1 = [1,1,-1,-1]^T \\ o_2 &= a_2 - \frac{\langle o_1, a_2 \rangle}{\langle o_1, o_1 \rangle} o_1 \\ &= [3,-1,1,-3]^T - \frac{4}{4}[1,1,-1,-1]^T \\ &= [2,-2,2,-2]^T. \end{aligned}$$

Nato vektorja o_1 in o_2 še normiramo:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{o_1}{\|o_1\|} = \frac{1}{2}[1,1,-1,-1]^T, \\ q_2 &= \frac{o_2}{\|o_2\|} = \frac{1}{2}[1,-1,1,-1]^T. \end{aligned}$$

Ortonomirana baza $C(A)$ je množica $\{q_1, q_2\}$.

b) (15 točk) Poišči pravokotno projekcijo vektorja $[1,2,2,3]^T$ na $C(A)$.

Ker imamo ortonormirano bazo prostora, lahko pravokotno projekcijo izračunamo tako, da seštejemo pravokotne projekcije na posamezne bazne vektorje

$$\begin{aligned} p &= \langle q_1, v \rangle q_1 + \langle q_2, v \rangle q_2 \\ &= -1 \cdot \frac{1}{2}[1,1,-1,-1]^T + (-1) \cdot \frac{1}{2}[1,-1,1,-1]^T \\ &= [-1,0,0,1]^T. \end{aligned}$$

4. naloga (25 točk)

Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) (2 točki) Izračunaj $A^T A$!

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 27 \\ 27 & 45 \end{bmatrix}.$$

b) (5 točk) Izračunaj karakteristični polinom matrike $A^T A$ in poišči vse njene lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje.

$$p(\lambda) = \det(A^T A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 45-\lambda & 27 \\ 27 & 45-\lambda \end{vmatrix} = (45-\lambda)^2 - 27^2.$$

Lastne vrednosti poiščemo kot ničle karakterističnega polinoma:

$$\begin{aligned} (45-\lambda)^2 - 27^2 &= 0 \\ (45-\lambda)^2 &= 27^2 \\ 45-\lambda &= \pm 27 \\ \lambda &= 45 \pm 27. \end{aligned}$$

Lastne vrednosti sta $\lambda_1 = 72$ in $\lambda_2 = 18$. Lastne vektorje poiščemo tako, da rešimo sistem $A^T A - \lambda I = 0$:

$$A^T A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 45-72 & 27 \\ 27 & 45-72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 & 27 \\ 27 & -27 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev je $v_1 = [1,1]^T$, ki je lastni vektor za $l_1 = 72$. Podobno dobimo

$$A^T A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 45-18 & 27 \\ 27 & 45-18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 27 \\ 27 & 27 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

in lastni vektor $v_2 = [1,-1]$ za $\lambda_2 = 18$.

c) (8 točk) Poišči ortogonalno matriko V in diagonalno matriko D, da bo $A^T A = VDV^T$.

Ortogonalno matriko V dobimo tako, da lastne vektorje normiramo in postavimo v matriko, v matriki D pa so lastne vrednosti po diagonali:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ in } D = \begin{bmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

d) (10 točk) Poišči kompaktni SVD razcep matrike $A = U\Sigma V^T$, kjer je U 3×2 matrika, za katero velja $U^T U = I$, Σ 2×2 diagonalna matrika in V 2×2 ortogonalna matrika.

Velja $A^T A = (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T = V\Sigma U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T$. Zato je V iz SVD razcepa enak matriki V iz diagonalizacije matrike $A^T A$, matrika $\Sigma^2 = D$:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ in } \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{72} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{bmatrix}.$$

Matriko U poiščemo iz enačbe $A = U\Sigma V^T$ => $U = AV\Sigma^{-1}$:

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{72}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$