Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Tretji izpit iz Linearne algebre
Teoretični del, 4. september 2024

Vsa vprašanja so enakovredna. Vsako je vredno 1 točko. Za reševanje imate 45 minut. Obkrožite pravilni odgovor in ga **utemeljite**. Za nepravilen odgovor dobite 0 točk, za utemeljitev pravilnega odgovora pa lahko dobite 0 ali 1/4 ali 1/2 ali 3/4 ali 1 točko. Če je utemeljitev povsem napačna, tudi pravilen odgovor ne prinaša točk.

1. Obstajata *neničelna* vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, tako da je $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

   DA *Utemeljitev:* Velja
   $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi, \qquad \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin\varphi|.$$
   Če je kot φ med vektorjema $\vec{u}, \vec{v}$ enak $\frac{\pi}{4}$, potem enakost $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$ drži.

2. Naj bosta $\Pi_1 : 2x + 3y + 4z = 5$, $\Pi_2 : 2x + 3y + 4z = 6$ ravnini in $A = (1, 0, 0)$ točka v $\mathbb{R}^3$. Obstaja točka B na ravnini Π_2, tako da premica skozi točki A in B ne prebada ravnine Π_1.

   NE *Utemeljitev:* Ravnini Π_1 in Π_2 sta vzporedni, saj imata isto normalo. Ker točka A ne leži na nobeni od njiju ($2 + 0 + 0 = 2 \notin \{5, 6\}$), nobena premica skozi A in točko na Π_2 ni vzporedna Π_1. Torej jo prebada.

3. Naj bo $S \subset \mathbb{R}^9$ množica vektorjev in $\mathrm{Lin}(S)$ njena linearna ogrinjača. Obstaja vektorski podprostor V, ki zadošča $S \subseteq V \subseteq \mathrm{Lin}(S)$ in $V \neq \mathrm{Lin}(S)$.

   NE *Utemeljitev:* Linearna ogrinjača $\mathrm{Lin}(S)$ je najmanjši vektorski podprostor, ki vsebuje množico S. Vektorski podprostor V iz naloge, ki vsebuje S in je strogo manjši od $\mathrm{Lin}(S)$, zato ne obstaja.

4. Matrika A ima karakteristični polinom enak $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$. Potem je dimenzija $\ker(A - I)$ lahko 3. Tu I označuje identično matriko ustrezne velikosti.

   NE *Utemeljitev:* Dimenzija $\ker(A - I)$ je lahko največ toliko, kot je stopnja večkratnosti ničle $\lambda = 1$ karakterističnega polinoma p_A. V primeru naloge je to 2.

5. Obstajata realni matriki A in B velikosti 4×4 z naslednjimi lastnostmi:

   (a) $\det(A) = 0$,

   (b) $\det(B) = 16$ in

   (c) natanko ena izmed matrik $A + B$ in AB je obrnljiva.

   DA *Utemeljitev:* Primer: $A = 0_4$, $B = 2I_4$, kjer je 0_4 ničelna matrika velikosti 4×4, I_4 pa identiteta velikosti 4×4.

6. Naj bo A 3×3 matrika, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ vektor v njenem jedru, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$ in $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ pa lastna vektorja pri lastni vrednosti 1. Matrika A je simetrična.

   NE *Utemeljitev:* Vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ nista ortogonalna. Lastni vektorji različnih lastnih vrednosti simetrične matrike pa so ortogonalni. Torej A ni simetrična.

7. Dana je matrika

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 5.21 & \alpha & 7.12 \\ 2 & -6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ne obstaja $\alpha \in \mathbb{R}$, da bo A obrnljiva matrika.

DA *Utemeljitev:* Ker je tretja vrstica (-2)-kratnik prve, matrika A ne bo obrnljiva za noben α.

8. Obstajajo linearne preslikave

$$L_1 : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4, \quad L_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2024}, \quad L_3 : \mathbb{R}^{2024} \to \mathbb{R}^7,$$

da ima linearna preslikava

$$L := L_3 \circ L_2 \circ L_1 : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$$

dimenzijo slike $\mathrm{im}(L)$ enako 5.

NE *Utemeljitev:* Ker je $\mathrm{im}(L_1) \subseteq \mathbb{R}^4$, od tod sledi, da je dimenzija $\mathrm{im}(L)$ lahko največ 4.

9. Naj bosta A matrika velikosti 5×4 in $b \in \mathbb{R}^5$ vektor, tako da velja $\|AA^+b - b\| > 0$. Tu je A^+ Moore-Penroseov inverz matrike A. Ali je sistem $Ax = b$ rešljiv?

NE *Utemeljitev:* Če je sistem rešljiv, potem je A^+b njegova rešitev. Torej velja $AA^+b = b$. Ker je $\|AA^+b - b\| > 0$, sistem ni rešljiv.

10. Naj bo $Q \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ matrika, za katero velja $Q^TQ = I_3$. Potem je $QQ^T = I_5$. Tu sta I_3 in I_5 identični matriki velikosti 3×3 in 5×5.

NE *Utemeljitev:* Protiprimer: $Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.