Vpisna številka:_______________ Ime in priimek:____________________________________

Linearna algebra - teorija
9. 6. 2025

Pri nalogah, ki imajo možnost **P**(ravilno)/**N**(epravilno) napišite P oziroma N in kratko utemeljitev. Pri ostalih nalogah odgovorite na zastavljeno vprašanje.

Čas pisanja je 20 minut.

(1) **(P/N)** Če sta vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ pravokotna, potem je $\|\vec{u}+\vec{v}\| \geq \|\vec{v}\|$.

P

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v}}_{0} + \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{u}}_{0} + \vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \geq \|\vec{v}\|^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\| \geq \|\vec{v}\|$$

(2) **(P/N)** Dana je matrika $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Če je $m > n$, potem obstaja tak vektor $b \in \mathbb{R}^m$, da enačba $Ax = b$ nima rešitve.

P

$$\dim C(A) \leq n \Rightarrow C(A) \neq \mathbb{R}^m \Rightarrow \text{obstaja } b \in \mathbb{R}^m,\ b \notin C(A)$$

(3) **(P/N)** Vsota obrnljivih matrik je obrnljiva matrika.

N

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{obrnljivi}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ni obrnljiva}$$

(4) Naj za obrnljivo matriko A velja $A^2 = A$. Izračunaj $\det(A)$.

$$\det(A^2) = \det(A)$$
$$\det(A)^2 = \det(A)$$
$$(\det(A) - 1)\underbrace{\det(A)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \det(A) = 1$$

(5) **(P/N)** Ravnina z enačbo $x+y+z=1$ tvori vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.

N Ker ne vsebuje točke $(0,0,0)$.

(6) **(P/N)** Za poljubno matriko $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ velja $\dim(N(A)) \geq 2$.

P $\dim N(A) = 5 - \underbrace{\dim C(A)}_{\leq 3} \geq 5-3 = 2$

(7) **(P/N)** Za kvadratno matriko A velja $\dim N(A) = \dim N(A^T)$.

P $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\dim N(A^T) = \dim(C(A)^\perp) = n - \dim C(A) = \dim N(A)$

(8) **(P/N)** Če je matrika B podobna diagonalizabilni matriki A, je tudi B diagonalizabilna.

P $A = PDP^{-1}$

$B = QAQ^{-1} = QPDP^{-1}Q^{-1} = (QP)D(QP)^{-1}$

(9) **(P/N)** Če za $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ velja $\operatorname{rang}(A-I)=3$, $\operatorname{rang}(A-2I)=4$ in $\operatorname{rang}(A+3I)=5$, potem se A da diagonalizirati.

P $g(1)=3$, $g(2)=2$, $g(-3)=1$ $\Rightarrow$ imamo 6 lastnih vektorjev

(10) **(P/N)** Če sta $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$ taka vektorja, da je $u_1^T v = u_2^T v$ za vse $v \in \mathbb{R}^n$, je $u_1 = u_2$.

P $(u_1^T - u_2^T)v = 0$ za vse $v \in \mathbb{R}^n$

$(u_1 - u_2)^T v = 0$ za vse $v \in \mathbb{R}^n$

$(u_1-u_2)^T(u_1-u_2) = 0$

$\Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$